МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2019
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2019
Proceedings of the Forty-eighth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 1–5, 2019

КОМПЮТЪРНА ВИСША МАТЕМАТИКА В ЛТУ

Мартин Ат. Станев

През 2018 г. започна работа студентски кръжок по компютърна висша математика в ЛТУ. Системното допълнително обучение в тази актуална математическа област се съчета и с интересите на някои от най-способните студенти в ЛТУ. Учебната програма в ЛТУ по математика служи за база, но се допълва, разнообразява и илюстрира чрез решаване на задачи с помощта на система за компютърна алгебра. Допълнителен стимул за засилването на интереса на студентите беше намерен във възможността за участие в ежегодно провежданата Националната студентска олимпиада по Компютърна математика CompMath.

1. Кръжок по КВМ в ЛТУ. През учебната 2018/2019 г. в ЛТУ се основа кръжок за студенти по Компютърна висша математика (КВМ). Това стана възможно след решение, взето на факултетен съвет на факултет Горска промишленост в началото на зимния семестър на 2018/2019 уч. г. Кръжокът е целогодишен (2ч/седм.) и е предназначен за малобройна група студенти.

1.1. Цели и задачи.

1. Организирано и систематизирано допълнително обучение по висша математика на някои от студентите в ЛТУ, имащи отлична математическа подготовка. Учебната програма в ЛТУ по математика служи за база, но се допълва, разнообразява и илюстрира чрез решаване на задачи с помощта на система за компютърна алгебра.

2. Насочване на студентите към намиране, формулиране и решаване на математически задачи със специфичен за ЛТУ приложен характер.

3. Участие на студентите в Национална студентска олимпиада по Компютърна математика CompMath [1].

4. Запознаване на студентите с някои от възможностите на софтуерния продукт Maxima (с wxMaxima като GUI) [2, 3].

Оценката на текущата работа на студентите в кръжока по КВМ е неявна и не е публична. Диференциране и стимулиране на отделните студенти се постига чрез специфичен темп на индивидуалната работа. Този подход се съчетава хармонично с проявения завишен интерес при овладяването на математиката от страна на участниците в кръжока, а те са някои от най-способните и амбициозни студенти в ЛТУ.

Цялостната работа на някои от участниците в кръжока добива конкретна количествена публична и явна оценка след участие в Националната студентска олимпиада по Компютърна математика. Качествена публична, явна и стимулираща оценка за работата на конкретен студент се оформя при проявен интерес от страна на водещи преподаватели по специалните, характерни за ЛТУ, дисциплини.

1.2. Основни теми. Темите представляват изучавания в ЛТУ материал по математическите дисциплини и в обобщен вид се формулират както следва:
(i) Линейна алгебра и аналитична геометрия
(ii) Диференциално и интегрално смятане
(iii) Диференциални уравнения
(iv) Вероятности и статистика
(v) Числени методи
Освен това има и една комплексна тема
(vi) Решаване на задачи за подготовка за участие в ежегодно провежданата Националната студентска олимпиада по Компютърна математика CompMath.

Работата по темите се състои главно в решаване на задачи с помощта на системата за компютърна алгебра Maxima.

1.3. История. В ЛТУ част от учебните дисциплини са свързани с обучаване на студентите да използват определени софтуерни продукти. Такива курсове са, например, инженерна и компютърна графика, компютърно проектиране на мебели. При изучаване на развитието на горски масиви се използва софтуер, обработващ действителни данни снети с лазерни скенери. При картографирането на планинските и горските терени се използват компютърни технологии, характерни за GIS (Географски информационни системи), а през 2016 е стартиран Кръжок по ГИС към ЛТУ. Трябва да се отбележи също, че някои преподаватели от ЛТУ посочват в публикувани научни резултати, че са използвали в изследователската си работа Wolfram Mathematica, R, софтуер за пресмятане на числени модели чрез метода на крайните елементи и др.

В преподаването на задължителните математически дисциплини се използват софтуерни продукти главно в курсовете по вероятности и статистика и отчасти в неотдавна закрититата дисциплина Математически методи в техниката, където се изучаваха и някои от основните числени методи. В ЛТУ не е преподавана учебна дисциплина, свързана с използване на система за компютърна алгебра.

Преподаване на математическите дисциплини с използване на система за компютърна алгебра започна през 2016 г., като в продължение на две години занятията се провеждаха епизодично и главно като консултации. Обучаваните студенти Анита Тодорова (специалност Ландшафтна архитектура (ЛА)), Гергана Александрова и Преслава Садинова (двете от специалност Инженерен дизайн (ИД)) участваха и се представиха много добре на Национална студентска олимпиада по Компютърна математика CompMath-2016, 2017.

2. Значимост на кръжока по КВМ в ЛТУ. Работата в кръжока по КВМ се състои в решаване на математически задачи с помощта на система за компютърна алгебра Maxima с графичен потребителски интерфейс wxMaxima. Задачите са подбрани така, че да допълват, разнообразяват и илюстрират темите, изучавани в задължителните математически дисциплини в ЛТУ. Участниците, няколко изключителни студенти от първи курс от специалностите ЛА и ИД, проявяват завидна настойчивост и демонстрират голям интерес в усвояването на материала.

Стартирането на систематичните и организирани занятия в кръжока по Компютърна висша математика оказва плодотворно влияние на научната подготовка на някои от студентите в ЛТУ. Гергана Александрова взе участие във Втората научна конференция с международно участие „Младите изследователи и съвременните научни предизвикателства“, проведена на 08-09 ноември 2018 г. в Лесотехнически университет с научен доклад, озаглавен „Компютърен модел на абстрактен вид плоча, изградена от дървесни частици“. Разглежданият компютърен модел е изчислен с помощта на системата за компютърна алгебра Maxima.

Съществува и се наблюдава един специфичен аспект от дейността на КВМ – популяризиране и налагане на използването на легален софтуер. Maxima и wxMaxima представляват програмни продукти с отворен код и са безплатни. Тяхното използване в университетска среда за обучение и изследователска работа е легално и е с голям позитивен философски заряд за перспективните студенти. От такава гледна точка, използването на Maxima за целите на преподаването на математическите дисциплини в ЛТУ на ранен етап, каквито са първи и втори курс, се оказва подходящ избор.

3. Задачи.

3.1. Текущи задачи от КВМ. Матрични уравнения от видовете $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ с матрици от тип 2x2 се решават като се дефинира матрица $\mathbf{X}$ с неизвестни елементи и, след извършване на действията с матриците, матричното уравнение се свежда до система от скаларни уравнения чрез приравняване на съответните елементи. Разглеждат се числови примери за случаите, в които матричното уравнение има безкрайно много решения, само едно решение или няма решения.

Освен това, решаването на задачи с Maxima налага и определена специфика. Например, задача от вида $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$ е възможно да има решение с матрица $\mathbf{X}$, чиито елементи се изразяват с радикали от цели числа, но решението е невъзможно да се изчисли директно. Налага се да се приложи методът за решаване чрез изразяване и заместване. Например, така се решава уравнението $\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Изследване и решаване на система линейни уравнения, зависещи от параметър, също е проблемен тип задачи. Например, при решаване на системата $3x + 4y = 6$, $6x + ay = 12$, където a е параметър, с команда solve се получава отговор $x = 2$, $y = 0$ и липсва каквото и да било указание за влиянието на стойността на параметъра a.

Измежду текущите рутинни задачи е и задачата за намиране на координатите на върховете на правилна триъгълна пирамида, за която са в сила следните три условия: (1) има ос върху права, минаваща през две дадени точки; (2) има даден основен връх; (3) дадена е дължината на околния ръб.

3.2. Други задачи. Ето и още две задачи, които е планирано да се обсъдят в кръжока.

Задача. Да се намери геометричното място на медицентровете на всички равнострани триъгълници, които са вписани в параболата $y = x^2$. Отг. парабола $y = 9x^2 + 2$.

Задача. Светлинен конус $z = 4(1 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2})$ осветява полусферата $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Да се пресметне площта на осветената част от полусферата. Отг. $\approx 1,5670$.

3.3. Задачи от CompMath. Тук са приведени решенията на две задачи от CompMath-2017. Тези задачи са сравнително трудни за студентите от ЛТУ. В предложените тук решения, от една страна, се използват само такива идеи, които под една или друга форма присъстват в учебната програма по математика в ЛТУ. От друга страна, се демонстрират някои от възможностите на Maxima като така се изтъква, че изборът на софтуерният продукт Maxima не е ограничил възможността за изява на студентите от ЛТУ по време на Националната студентска олимпиада по Компютърна математика.

CompMath-2017-A-5. За кои естествени числа $n < 200$ полиномът $x^{2n} + 16x^n + 8n$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?

Проста директна проверка се прави за „малките“ естествени числа $1 \leq n \leq 10$.

```
(%i1)  kill(all)$ reset()$
(%i2)  f(x,n):=x^(2*n)+16*x^n+8*n$
(%i3)  for n:1 thru 10 do print(n,factor(f(x,n)));
```

Така се получава, че ако $1 \leq n \leq 10$, то полиномът е разложим при $n = 6$ и при $n = 8$.

Този подход има лимит. Оказва се, че необходимото време за намиране на разлагане на полинома f нараства с увеличаване на n. Продължителността на изчисленията е приемлива до около $n = 140$. Обаче, за някои $n > 150$ командата `factor(f(x,n))` отнема повече от 4 часа компютърно време с резултат, че полиномът не се разлага. Ето защо работата на Maxima трябва да се комбинира с изчисления на ръка.

Решава се уравнението $x^{2n} + 16x^n + 8n = 0$, където x е комплексно число и $n > 10$

$$x^n = -8 \pm \sqrt{8n - 64}\, i$$

Коренуването $\sqrt[n]{-8 \pm \sqrt{8n-64}\, i}$ се прави по формулата на Моавър. Конкретните формули (няма да ги привеждаме тук) за x след коренуването показват, че всички корени на уравнението $x^{2n} + 16x^n + 8n = 0$ са еднократни и имат един и същ модул равен на $\sqrt[2n]{8n}$.

Разлагане на полинома f на множители след прегрупиране се свежда до два множителя $f = f_1 f_2$, където f_1 и f_2 са полиноми с цели коефициенти. Нека степента на f_1 е m.

Свободният член на f_1 е цяло число и по абсолютна стойност е произведението на модулите на корените на f_1. Следователно, произведението на модулите на тези корени е $(\sqrt[2n]{8n})^m$ и е цяло число.

Съставя се списък на стойностите на n, $10 < n < 200$, за които $(\sqrt[2n]{8n})^m$ е цяло число за някое $1 \leq m \leq 2n - 1$.

```
(%i6) i:1$ kill(A)$
      for n:11 thru 199 do(
       for m:1 thru (2*n-1) do(
        k1:(8*n)^(m/(2*n)),
        if integerp(k1) then (
         A[i]:n, i:i+1
      )))$ /* отнема около 5-10 сек. */;
(%i7) setify(listarray(A));
(%o7) {18; 27; 32; 50; 72; 98; 128; 162}
```

Следователно, проверка за разложимост трябва да се направи за стойностите на n, които са в този списък.

```
(%i6) for n in % do( print(n,factor(f(x,n))) )$
      /* отнема около 20-25 сек. */;
```

Раложимост се получава само за $n = 32$.

И така, в заключение, при $1 \leq n < 200$ полиномът е разложим само за $n = 6, 8, 32$.

Ето и втората задача от CompMath-2017.

CompMath-2017-B-23. Да се намери най-голямото цяло число, за което лицето на криволинейния трапец, заграден от кривата $y = e^{x^2}$ и правите $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, е по-малко от 2017^{2017}.

Лицето е $S = \displaystyle\int_0^a e^{x^2}\ \mathrm{d}x$ и следователно, S трябва да се пресмята числено. Обаче, в условието на задачата лимитът L е 2017^{2017} и е число, което е извън обхвата на библиотечните функции за числени пресмятания.

```
(%i1) kill(all)$ reset()$
(%i2) L:2017^2017;
(L)   3.906579755433726b6665
```

Ето защо, се налага да се преобразува интеграла във формулата за лицето

$$S = \sum_{i=0}^{a-1} \int_i^{i+1} e^{x^2}\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{a-1} \int_0^1 e^{(x+i)^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{a-1} \int_0^1 e^{x^2+2xi+i^2}\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{a-1} e^{i^2} \int_0^1 e^{x^2+2xi}\ \mathrm{d}x$$

В получената формула, e^{i^2} се пресмята като число с повишена точност.

```
(%i3) f(i):=%e^(i^2b0)*(quad_qag(%e^(x^2+2*x*i),x,0,1,1)[1])$
(%i6) S:0$ for i:0 thru 100 do S:S+f(i)$ S;
(%o6) 8.564062243730678b4427
```

Това число е по-малко от лимита L. Следователно, търсената стойност на $a \geq 101$.

```
(%i9) a:101$ for i:101 thru 150 while(S<L) do( S:S+f(i),a:i)$ a;
(%o9) 123
(%i1) kill(all)$ reset()$
```

И така, отговорът е $a = 123$.

4. Заключение. Системното допълнително обучение по математика, комбинирано с възможностите на система за компютърна алгебра, представлява необходимата и очаквана актуализация в академичната подготовка на едни от най-способните студенти в ЛТУ. Допълнителен стимул за засилването на интереса на студентите беше намерен в благосклонното отношение от страна на ръководството на Лесотехническия университет. Студентите оцениха положително и възможността за участие в ежегодно провежданата Националната студентска олимпиада по Компютърна математика CompMath.

ЛИТЕРАТУРА

[1] CompMath, http://compmath.eu, 2018.
[2] Maxima, http://maxima.sf.net.
[3] wxMaxima, https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/.

Мартин Ат. Станев
Катедра Математика и Физика
Лесотехнически университет
София, България
e-mail: martin_stanev@yahoo.com

MATHEMATICS WITH CAS AT THE UNIVERSITY OF FORESTRY

Martin At. Stanev

In 2018 it was founded a small students' study group aimed at using a computer algebra system to solve mathematical problems. This group was designed to be useful modernization of the education for some of the best students from the University of Forestry. Curriculum from the mathematics courses at the UF was combined with problems from many additional sources in order to achieve an interesting and significantly more complete mathematical education. The students at the UF were inspired to master their abilities to solve mathematical problems with CAS by the annual national students' competition CompMath.