

**ОТКРИВАНЕ И ОТСТРАНЯВАНЕ НА ПОГРЕШНИ
ПРЕДСТАВИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКИ ОБЕКТИ И
ПОНЯТИЯ С ПОМОЩТА НА ИНФОРМАЦИОННИ
ТЕХНОЛОГИИ***

Тони Чехларова, Евгения Сендова, Петър Кендеров

Едно от предизвикателствата в образованието по математика е относително честата поява сред учениците на погрешни и/или неточни представи за изучаваните обекти, понятия и явления. Това не е случайно. Математическите обекти и понятия често са абстрактни и има трудности при формирането на правилна и точна представа за тях. Грешните представи са устойчиви и създават пречки в следващите етапи на обучение.

В статията са показани някои възможности на информационните технологии за установяване и отстраняване на погрешните представи. За целта се използват ресурси от Виртуалния училищен кабинет по математика, който е достъпен по всяко време на адрес <http://cabinet.bg/>. Разгледани са примери за различни възрастови групи и от различни области на математическо знание. Разработката е част от изпълнението на съвместен проект между БАН и МАНИ (Македонска академия на науките и изкуствата).

Въведение. Едно от предизвикателства в образованието по математика и природни науки е възникването у някои от учениците на грешни и/или неточни от научна гледна точка представи за изучаваните обекти, понятия и явления. Причините за това са много. Изучаваните обекти, факти и понятия често са абстрактни и допускат различни тълкувания. Немалък „принос“ за формиране на грешни представи имат както безкритичното възприемане на информация от традиционните средства за масова информация, така и от публикациите в интернет. Освен това, редица представи на учениците се формират преди целенасоченото им разглеждане в училище. Обикновено за учениците е трудно да „отучат“ грешните идеи и понятия, а това създава пречки в следващите етапи на обучение. Затова е важно да се полагат усилия за идентифициране на грешните представи и за коригирането им. Тъкмо това е основната цел на съвместният проект (между БАН и МАНИ) „**Изследване на концептуалното знание и наличието на грешни представи в часовете по математика и природни науки**“. Група от специалисти по химия и математика от България и Македония разработва инструментариум както за идентифициране на неправилни схващания и интерпретации на изучавания материал по

* **Ключови думи:** грешни представи, динамичен софтуер, математически понятия.

математика и природни науки, така и за корекцията и замяната им със стабилно, научно издържано знание.

Методическата подготовка на бъдещите учители по математика и природни науки включва както изучаването на типични грешки на учениците при формиране на конкретно знание, така и основните средства за отстраняването им [7], [9], [10], [11]. В обучението за повишаване на квалификацията на педагогическите специалисти по математика един от акцентите е работата с грешките на учениците [5], [8]. Типичните грешки се използват активно при създаването на дистракторите в тестови задачи с избираеми отговори. Опитните учители, дори когато възможните грешки не са допуснати в час, създават ситуации, в които ги демонстрират. Промените в учебните програми и планове и прилагането на разнообразни подходи и методи обаче внасят частични промени и в съответните грешки.

Тук ще представим някои възможности на информационните технологии за откриване и отстраняване на грешни представи при изучаването на математиката, като разгледаме примери за различни възрастови групи и от различни области на математическо знание. За целта използваме ресурси от Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван от секция Образование по математика и информатика на Института по математика и информатика на Българска академия на науките <http://cabinet.bg/> [5], [12].

Използване на информационните технологии за откриване и отстраняване на грешни представи при изучаването на математиката.

• **Представяне на геометрични обекти с динамични конструкции**

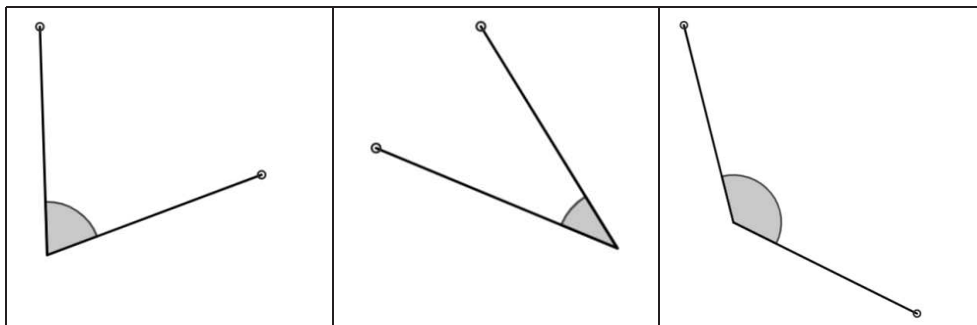
Типичното изобразяване на основни геометрични фигури при въвеждането им в началното училище включва хоризонтално разположение на основен елемент, например рамо на ъгъл, страна на триъгълник, на правоъгълник и в частност на квадрат. Това води до трудности при идентифицирането на тези геометрични обекти и някои техни характеристики, когато те са разположени по друг начин в равнината, особено когато са част от по-сложна фигура. Най-често грешки при разпознаване се наблюдават в задачи за преброяване на обекти от конкретен вид.

При въвеждането на нов обект/ново понятие, с цел намаляване на вероятността от неправилно схващане, е подходящо използването на динамични конструкции, чрез които обектът или понятието се визуализират в най-различни възможни положения.

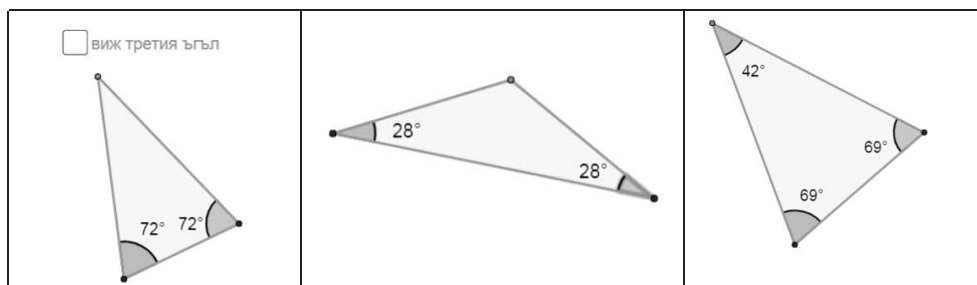
На фиг. 1 са показани ъгли, получени от динамична конструкция, реализирана със системата *GeoGebra* [1], която е много удобна за работа с математически обекти. Промяната на положението на рамо се осъществява с преместване на точка. Това позволява да се избегне погрешната представа, че всеки ъгъл има или хоризонтално, или вертикално рамо. Този файл, както още няколко други подобни файла във Виртуалния училищен кабинет по математика, могат да се използват за определяне на вида на ъгъла (остър, прав, тъп), за намиране на градусната му мярка с определена точност чрез измерване с транспортир или чрез окомер.

На фиг. 2 са показани няколко равнобедрени триъгълника, получени чрез динамичен модел на равнобедрен триъгълник. Те служат за преодоляване на същия недостатък. В случая задачата е за посочване вида на равнобедрения триъгълник според неговите ъгли.

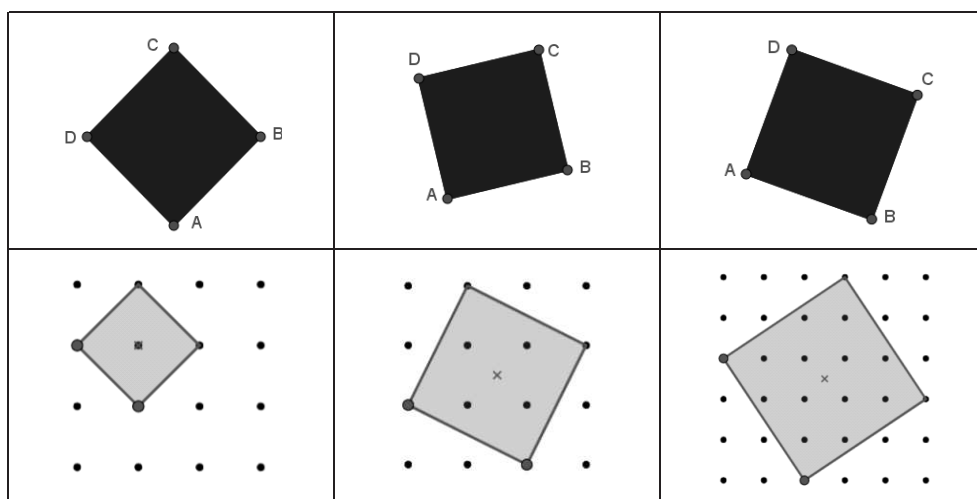
Системното използване на такива динамични конструкции на изучавани фигу-



Фиг. 1. Представяне на ъгли с динамичен файл
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d12059.html>



Фиг. 2. Представяне на равнобедрени триъгълници с динамичен файл
<http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=85>



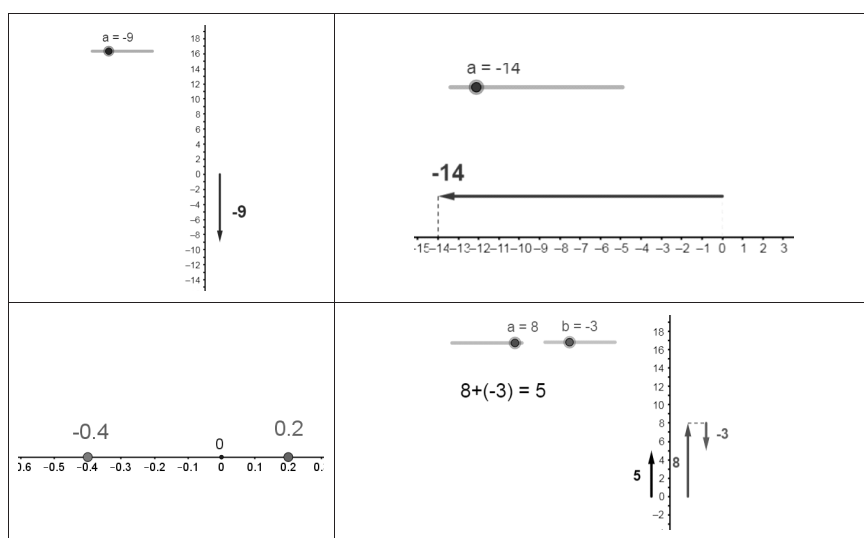
Фиг. 3. Представяне на квадрат с динамичен файл
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d12014.html>
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d12072.html>

ри, с които конструкции удобно се извършва промяна на позицията и големината на съответния обект, е условие за преодоляване на разглеждания проблем с разположението на фигурите.

Изключително често първият квадрат във фиг. 3 се идентифицира от учениците от 5. клас като ромб, по-точно като ромб, който не е квадрат. Аналогично, при преброяване на квадрати с върхове в някои от възлите на част от квадратна решетка, често се преброяват само квадратите с хоризонтални и вертикални страни. При работа с предоставените файлове лесно се получават квадрати с различно разположение и е подходящо те да се използват в началното училище при поставяне на различни задачи.

• **Динамично онагледяване на рационални числа.** Въвеждането на отрицателните числа и съответно на рационалните числа се осъществява в 6. клас в българското училище. От една страна, учениците вече са използвали отрицателни числа в практиката, например за означаване на температура. От друга страна, за дълбокото разбиране на отрицателните и рационалните числа е необходимо полагане на продължителни специални усилия. Най-често грешки се допускат при сравняването им или при извършване на действия с рационални числа.

На фиг. 4 са представени няколко файла за онагледяване на рационални числа. Конкретните стойности на числата се управляват с параметри-плъзгачи или преместване на точки върху числовата ос. С последния файл на фиг. 4 се подпомага осмислянето на факта, че при събиране с отрицателно число сборът е по-малък от другото събираемо.



Фиг. 4. Файлове за онагледяване на рационални числа

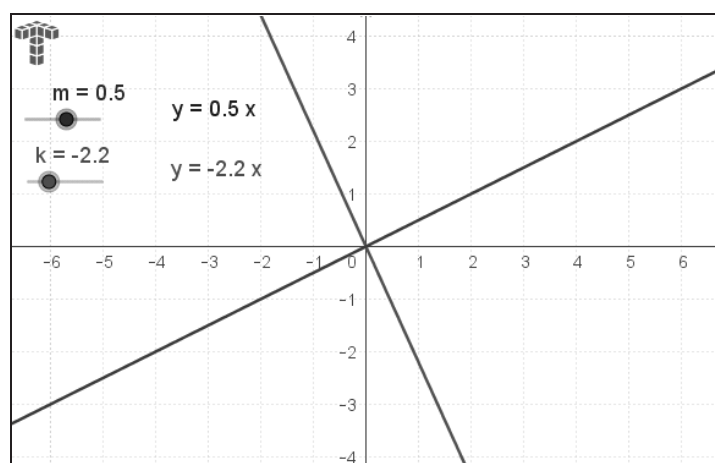
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d14158.html>

<http://cabinet.bg/content/bg/html/d14159.html>

<http://cabinet.bg/content/bg/html/d14161.html>

<http://cabinet.bg/content/bg/html/d14162.html>

В 6. клас се изучават права пропорционалност и обратна пропорционалност. В продължение на десетилетия в учебници и помагала, включително и в действащи в момента, се използват следните определения или еквивалентни на тях: „За две величини x и y казваме, че са правопрпорционални, ако с увеличаването или намаляването на едната няколко пъти също толкова пъти се увеличава или намалява и другата величина. Такава зависимост се записва: $y : x = k$ или $y = k \cdot x$, където $k \neq 0$ е коефициент на пропорционалност“. Съответно „Величините x и y се наричат обратнопропорционални: когато едната се увеличава или намалява няколко пъти, другата намалява или се увеличава съответно толкова пъти, т.е. $x \cdot y = k$ или $y = k : x$ при $x \neq 0$. Числото k , което показва колко пъти се изменят x и y , се нарича коефициент на обратната пропорционалност“. Ясно е, че за отрицателна стойност на коефициента на пропорционалност споменатите определения не са издържани. Учениците могат да бъдат насочени сами да открият тази неточност, като се разгледат конкретни примери. Удачно е и построяването на графика на права пропорционалност с положителен коефициент и графика на пропорционалност с отрицателен коефициент на пропорционалност. С файл на *GeoGebra* тези графики се онагледяват много добре, като се вижда и как се променя графиката, когато коефициентът на пропорционалност се мени (фиг. 5).

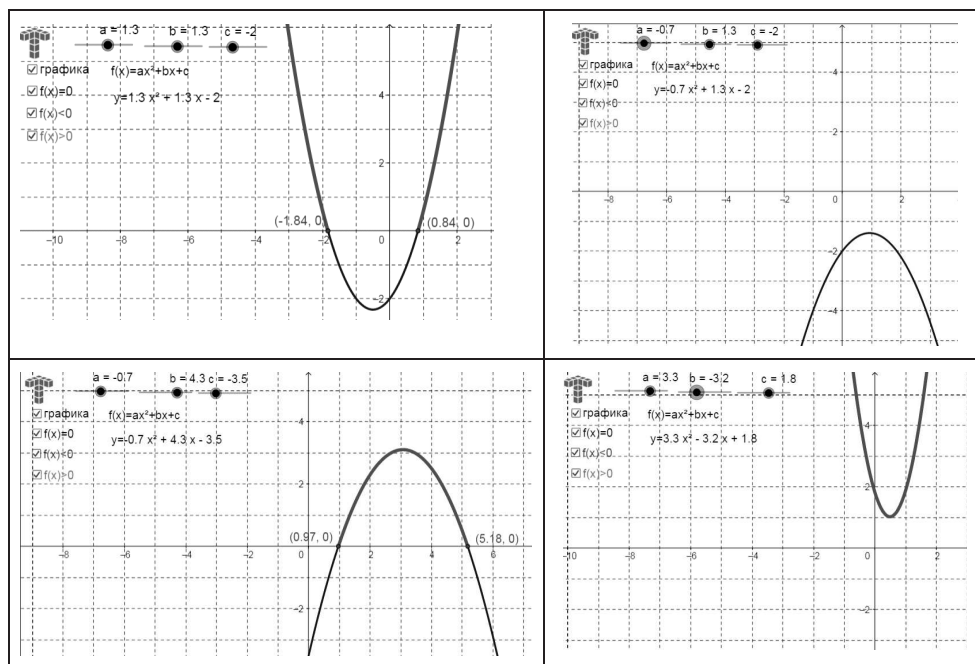


Фиг. 5. Графика на права пропорционалност с възможност за промяна на коефициента на пропорционалност
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d19005.html>

Част от грешното разбиране на правата и обратната пропорционалност е свързана с отрицателните числа, но има отношение и към функциите и графиките им.

• **Възприемане на графична информация.**

Широко използван днес похват за изобразяване на динамиката на даден процес е представянето на изменението на важен негов показател като графика на функция (икономически ръст, демографски спад, флукутация на борсови индекси и др.). Правилното „разчитане“ на такъв род графики често е предизвикателство и е източник на погрешни представи. Не случайно, в различни видове тестове често се дават

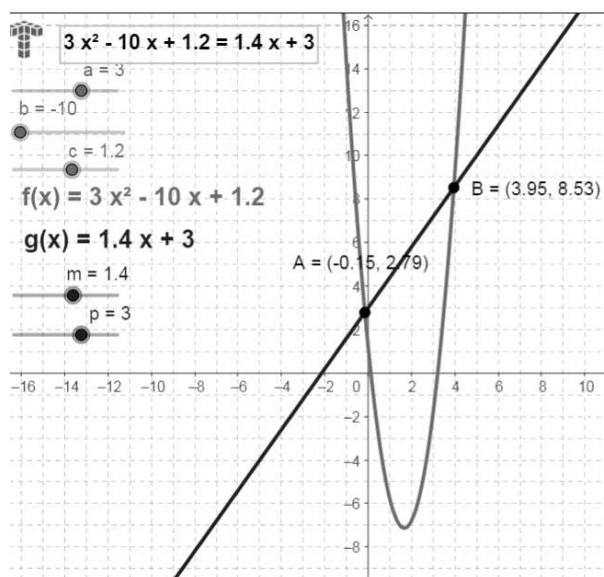


Фиг. 6. Файл за графично решаване на квадратни неравенства
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d19035.html>

задачи за описване на процес, изобразен чрез графика. С помощта на подходящ софтуер може значително да се развият способностите на учениците да разчитат правилно графична информация. Изобразената с компютър графика на функция, особено при наличие на параметри, позволява лесно да се илюстрират съществени случаи, да се откриват закономерности и да се формулират хипотези.

Графичното представяне на решения на уравнение или неравенство подпомага разбирането и тълкуването на резултати, получени с обичайните алгебрични методи. На фиг. 6 е показан модел за демонстриране на връзката между графиката на квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ и графичното изобразяване на решенията на квадратно уравнение и няколко квадратни неравенства: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$. С плъзгачите-параметри се задават конкретните стойности на коефициентите на квадратната функция, а с отметките за скриване/показване се управлява графичното изображение.

Софтуерните среди като *GeoGebra* увеличават силно възможностите за прилагане на знанията за функции при решаване на задачи, възникващи от практиката. Когато се получи математически модел, който не може да бъде решен с налични ученически знания, със специализиран софтуер може да се намери решение – графично или с използване на съответна команда [2], [6]. Затова работата по разчитане и интерпретиране на резултати от графично представяне на функции придобива самостоятелно значение.



Фиг. 7. Интерпретации при използването на графики
<http://cabinet.bg/content/bg/html/d19230.html>

На фиг. 7 са представени графиките на линейната функция и на квадратната функция. Този файл може да бъде използван за решаване (или за представяне на решенията) на няколко уравнения, неравенства и системи. Ако класическото решение на уравнението $3x^2 - 10x + 1,2 = 1,4x + 3$ е свързано с извършване на преобразувания до привеждане в нормален вид, то при използване на динамичен софтуер понякога е подходящо да се построят директно графиките на функциите, свързани с изразите в двете страни на уравнението, и да се види къде графиките се пресичат. От една страна така се намалява възможността за допускане на технически грешки, а от друга се наблюдават и двете графики като самостоятелни обекти. Това е уравнение от втора степен с едно неизвестно и в случая се интересуваме от пресечните точки на двете графики. Решенията са абсцисите на тези точки, т.к. за тези стойности на x функционалните стойности на двете функции са равни.

С разглеждания файл може да решим системата уравнения с две неизвестни

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 10x + 1,2 \\ y = 1,4x + 3 \end{cases}$$

Тази система има две решения – наредените двойки числа, представляващи координатите на пресечните точки А и В на двете графики.

Заключение. Съвременните Информационни и комуникационни технологии са удобно средство за откриване и отстраняване на неправилни схващания и интерпретации на училищния материал по математика. Виртуалният училищен кабинет по математика (<http://cabinet.bg/>) предоставя значителни ресурси в това отношение. Освен многобройните аплети, в него има разработени редица учебни теми, както и теми с решени задачи от минали издания на онлайн състезанията „VIVA

Математика с компютър“ и „Тема на месеца“ [2], [3], [4], [5], [12]. В квалификационни курсове с учители от България и Македония подготовката за работа с такива ресурси е на три нива [8] – използване на готови файлове, теми и аплети, модифициране на съществуващи файлове и самостоятелно разработване и създаване на аплети. Не е без значение и това, че учениците могат сами да използват Виртуалния училищен кабинет и да уточняват експериментално представите си за изучаваните математически обекти и факти.

Резултатът е частично подкрепен от проект „Изследване на концептуалното знание и наличието на грешни представи в часовете по математика и природни науки“ между БАН и МАНИ и от Национална научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. HOHENWARTER, M. HOHENWARTER, Z. LAVICZA. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, 2 (2009), 135–146.
- [2] P. KENDEROV. Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13 Monographs (eds G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu) Springer, Cham, 2018, 289–306.
- [3] P. KENDEROV, T. ЧЕНЛАРОВА, E. SENDOVA. A Web-based Mathematical Theme of the Month. *Mathematics Today*, **51**, 6 (2015), 305–309.
- [4] P. KENDEROV, T. ЧЕНЛАРОВА. Extending The Class Of Mathematical Problems Solvable in School. *Serdica J. Computing* **9**, 3–4 (2015), 191–206.
- [5] P. KENDEROV, T. ЧЕНЛАРОВА, E. SENDOVA. A Virtual Mathematics Laboratory in support of educating educators in inquiry-based style. In: Conference Proceedings in Educating the educators: international approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education (eds K. Maaß et al.) 15–16 December 2014, Essen, Germany, 2015, 167–176.
- [6] П. КЕНДЕРОВ, Т. ЧЕХЛАРОВА. Състезание Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика. Пловдив, Макрос, 2016
- [7] Т. ЧЕХЛАРОВА, Г. СТАНЧЕВ. Формиране на умения у студентите за работа с грешки на занятията по АВИТО. В: *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски“*. **38**, 2, Методика на обучението, (2001), 107–112.
- [8] Т. ЧЕХЛАРОВА. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. Пловдив, Макрос 2000, 2017
- [9] Т. ЧЕХЛАРОВА. Проверка на знанията и уменията на студентите по темата „Математически понятия и методика на изучаването им“. В: Сборник научни трудове Математика и методика на обучението по математика и информатика. Университетско издателство „Епископ Константин Търновски“, Шумен, 2003, 52–55.
- [10] Т. ЧЕХЛАРОВА, Б. ЦЕКОВА. Относно организацията на занятията по хоспитиране. В: *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски“*, **40**, 2, Методика на обучението (2003), 63–68.
- [11] Т. ЧЕХЛАРОВА. Етапи на провеждане на текущата педагогическа практика. В: *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски“*, **41**, 2, Методика на обучението (2004), 73–79.

Тони Чехларова
e-mail: toni.chehlarova@math.bas.bg
Евгения Сендова
e-mail: jenny.sendova@gmail.com
Петър Кендеров
e-mail: kenderovp@cc.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България

IDENTIFYING AND REMOVING MISCONCEPTIONS ABOUT MATHEMATICAL OBJECTS AND CONCEPTS BY DIGITAL TECHNOLOGIES

Toni Chehlarova, Evgenia Sendova, Petar Kenderov

One of the challenges in mathematics education is the relatively frequent occurrence of misconceptions of objects, concepts and phenomena being studied by the students. This is due to the fact that the mathematical objects and concepts are abstract and it is difficult for the learner to build a correct and accurate idea about them. Furthermore, the misconceptions are resistant and create barriers in the next stages of education.

The paper presents opportunities for identifying and removing some misconceptions by means of digital technologies. For the purpose, resources of the Virtual Mathematical Laboratory (VirMathLab), <http://cabinet.bg/>, which are freely accessible, are used. Examples for different age groups and various fields of mathematics are considered. The work is part of the joint project between Bulgarian Academy of Sciences and the Macedonian Academy of Sciences and Arts.