

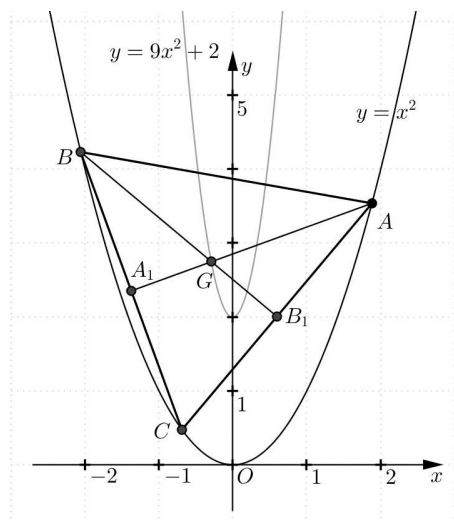
## ГЕОМЕТРИЧНО МЯСТО НА МЕДИЦЕНТРОВЕТЕ НА ВПИСАНИ В ПАРАБОЛА РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Мартин Станев

Геометрично място от медицентровете на равностранными триъгълници, вписани в дадена парабола, е отново парабола.

**1. Увод.** Геометричното място (ГМ) на средите на хордите на парабола, успоредни на дадена права, е добре известно. По аналогия се формулира задачата за описание за ГМ за медицентровете на фамилия от триъгълници, вписани в парабола.

Задачата за намиране на ГМ на медицентровете на вписани в парабола равностранными триъгълници е оригинална (доколкото ни е известно) и не се среща в литературата.



Оказва се, че ако се разглежда фамилията от вписани в парабола равностранными триъгълници, то ГМ на техните медицентрове е отново парабола. Числени експерименти подсказват, че ако вместо медицентрове се разглеждат точки с други фиксирани барицентрични координати, то геометричното място от точки (ГМТ) е

234

твърде сложно множество. При това, ако се разглежда фамилия от подобни триъгълници, които не са равностранни, то ГМ на медицентровете е отново твърде сложно множество. Вероятно, такава ГМТ е парабола единствено при разглеждане на медицентровете на равностранни триъгълници, които са вписани в парабола.

Главната теорема в настоящата статия е Теорема 2.1 и в нея е описано ГМ на медицентровете на вписани в парабола равностранни триъгълници.

Теорема 2.1 се доказва със средствата на аналитичната геометрия. В декартова координатна система  $Oxy$  е достатъчно да се разгледа случаят на равностранни триъгълници, вписани в параболата  $y = x^2$ . Общият случай се свежда до този с помощта на подобност. Положението на трите върха на вписан триъгълник се характеризира с техните три абсциси. Координатите на медицентъра на вписан триъгълник се изразяват чрез елементарните симетрични полиноми на три променливи. След това се получава, че медицентровете описват параболата  $y = 9x^2 + 2$ . Някои от формулите са сравнително големи и преобразуването им без помощта на системата за компютърна алгебра МАХИМА щеше да е предизвикателство.

При подготовката на тази разработка е използван софтуерният продукт GeoGebra. Чертежът е подготвен с *GeoGebra* [8] и е експортиран чрез PGF/TikZ код. Основният евристичен инструмент в тази разработка е GeoGebra.

Резултати, аналогични на Теорема 2.1, съществуват за елипса, хипербола, двойка прави. В случая на елипса, резултатът е публикуван в [4] и ГМТ е отново елипса. В случая на хипербола това ГМТ е хипербола (за равнораменна хипербола се получава, че ГМТ е същата хипербола) или двойка успоредни прави (успоредни на имагинерната ос). В случая на прави ГМТ е двойка прави (или една права). Трудността на проблема за хипербола е сравнима с тази за елипса. В случая на парабола проблемът е значително по-лесен за решаване и в случая на прави решението е очевидно.

В литературата специалните разположения на конично сечение и триъгълник се проследяват в ред теореми. Така, известна е теоремата [3, 2] за елипса, допираща се до средите на страните на триъгълник — фокусите на такава елипса са нули на производната на полином от трета степен от комплексна променлива с нули във върховете на триъгълника. По даден триъгълник се определя елипса, в която той е вписан и допирателните във върховете са успоредни на срещуположните страни — това е елипсата на Щайнер<sup>1</sup> (триъгълникът е вписаният триъгълник с максимално лице) или описаната елипса е с минимално лице [5, 1, 6].

## 2. Главна теорема.

**Теорема 2.1.** *Нека в декартова координатна система  $Oxy$  са дадени параболическите  $\mathcal{P} : y = x^2$  и  $\mathcal{P}_1 : y = 9x^2 + 2$ . Ако  $A, B$  и  $C$  са три различни точки, такива, че  $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$  и  $\triangle ABC$  е равностранен, то медицентърът на  $\triangle ABC$  лежи на  $\mathcal{P}_1$ . Обратно, ако точка  $G \in \mathcal{P}_1$ , то съществуват точки  $A, B$  и  $C$ , такива, че  $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$ ,  $\triangle ABC$  е равностранен и е с медицентър в точка  $G$ .*

Така,  $\mathcal{P}_1$  е ГМ на медицентровете на вписаните равностранни триъгълници в  $\mathcal{P}$ .

**Забележка 1.** Съществуват равностранни триъгълници  $ABC$ , чиито върхове са три различни точки от  $\mathcal{P}$ .

---

<sup>1</sup>Jakob Steiner (1796–1863) швейцарски геометър (бел. ред.).

Например, директна проверка показва, че  $A\left(\frac{-29\sqrt{3}}{36}, \frac{841}{432}\right)$ ,  $B\left(\frac{49\sqrt{3}}{36}, \frac{2401}{432}\right)$ ,  $C\left(\frac{-55\sqrt{3}}{36}, \frac{3025}{432}\right)$  са три различни точки от  $\mathcal{P}$  и  $\triangle ABC$  е равностранен. Медицентърът на  $\triangle ABC$  е точка  $G\left(\frac{-35}{36\sqrt{3}}, \frac{2089}{432}\right)$  и тя лежи на параболата  $\mathcal{P}_1$ .

**Забележка 2.** Ако  $A$  е произволна точка от  $\mathcal{P}$ , то съществуват точки  $B \in \mathcal{P}$  и  $C \in \mathcal{P}$  такива, че  $\triangle ABC$  е равностранен. Точките  $B \in \mathcal{P}$  и  $C \in \mathcal{P}$  се построяват по следния алгоритъм:

- (стъпка 1.) намира се образът  $\mathcal{P}'$  на  $\mathcal{P}$  при ротация на ъгъл  $+60^\circ$  с център точка  $A$ ;
- (стъпка 2.) намират се пресечните точки на  $\mathcal{P}'$  и  $\mathcal{P}$  — те са поне две различни точки и едната е точка  $A$ ;
- (стъпка 3.) избира се точка  $B$  да е различна от  $A$  и да е една от пресечните точки на  $\mathcal{P}'$  и  $\mathcal{P}$ ;
- (стъпка 4.) намира се образът  $C$  на  $B$  при ротация на ъгъл  $(-60)^\circ$  с център точка  $A$ .

Триъгълник  $ABC$  е равностранен и върховете му са точки от  $\mathcal{P}$ . Твърдението от тази *Забележка* не се използва в доказателството на Теорема 2.1, но намира приложение при изготвяне на динамичен чертеж с GeoGebra.

**Забележка 3.** Нека  $x_A, x_B$  и  $x_C$  са реални числа. Да положим  $\sigma_1 = x_A + x_B + x_C$ ,  $\sigma_2 = x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A$ ,  $\sigma_3 = x_A x_B x_C$  и  $\triangle ABC$  да е с върхове  $A(x_A, x_A^2)$ ,  $B(x_B, x_B^2)$  и  $C(x_C, x_C^2)$ .

**Лема 2.1.** Нека за реалните числа  $x_A, x_B$  и  $x_C$  да е в сила, че  $x_B \neq x_C$  и точките  $A, B$  и  $C$  да са с координати  $A(x_A, x_A^2)$ ,  $B(x_B, x_B^2)$  и  $C(x_C, x_C^2)$ . Отсечките  $AB$  и  $AC$  имат равни дължини  $\iff$

$$3x_A^3 - 3\sigma_1 x_A^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_A - (2\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_3) = 0,$$

където  $\sigma_1 = x_A + x_B + x_C$ ,  $\sigma_2 = x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A$ ,  $\sigma_3 = x_A x_B x_C$ .

**Доказателство на Лема 2.1.** Равенството  $|AB| = |AC|$  на дължините на отсечките  $AB$  и  $AC$  е еквивалентно на  $|AB|^2 = |AC|^2$  и като се запише с координати, се получава

$$\begin{aligned} & (x_B - x_A)^2 + (x_B^2 - x_A^2)^2 - (x_B - x_C)^2 - (x_B^2 - x_C^2)^2 = 0 \\ \iff & (x_B - x_C)(x_B + x_C - 2x_A) + (x_B^2 - x_C^2)(x_B^2 + x_C^2 - 2x_A^2) = 0 \\ \iff & (x_B + x_C - 2x_A) + (x_B + x_C)(x_B^2 + x_C^2 - 2x_A^2) = 0 \\ \iff & \sigma_1 - 3x_A + (\sigma_1 - x_A)(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 - 3x_A^2) = 0 \\ \iff & \sigma_1 - 3x_A + (\sigma_1 - x_A)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 3x_A^2(\sigma_1 - x_A) = 0. \end{aligned}$$

□

**Лема 2.2.** Ако точките  $A(x_A, x_A^2)$ ,  $B(x_B, x_B^2)$  и  $C(x_C, x_C^2)$  са различни и  $\triangle ABC$  е равностранен, то  $\sigma_1 = x_A + x_B + x_C$ ,  $\sigma_2 = x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A$  и  $\sigma_3 = x_A x_B x_C$

удовлетворяват системата

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma_2 = -3 - \sigma_1^2, \\ 3\sigma_3 = -7\sigma_1 - 3\sigma_1^3 \end{cases}$$

**Доказателство на Лема 2.2.** Нека точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  да са различни и дължините на страните на  $\triangle ABC$  да са равни. От Лема 2.1 следва и

- от  $|AB|^2 = |AC|^2$  следва
$$3x_A^3 - 3\sigma_1 x_A^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_A - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0;$$
- от  $|AB|^2 = |BC|^2$  следва
$$3x_B^3 - 3\sigma_1 x_B^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_B - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0;$$
- от  $|AC|^2 = |BC|^2$  следва
$$3x_C^3 - 3\sigma_1 x_C^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_C - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0.$$

Така се получава, че трите различни числа  $x_A$ ,  $x_B$  и  $x_C$  са корените на уравнението

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3}{3}x - \frac{2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1}{3} = 0.$$

Следователно,  $\sigma_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3}{3}$  и  $\sigma_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1}{3}$ , откъдето следва (1).  $\square$

**Доказателство на Теорема 2.1.** Да предположим, че  $A(x_A, x_A^2)$ ,  $B(x_B, x_B^2)$  и  $C(x_C, x_C^2)$  са три различни точки, такива, че  $\triangle ABC$  е равностранен. Прилага се Лема 2.2 и се получава, че е в сила (1). Пресмятат се координатите на медицентъра  $G(x_G, y_G)$  на  $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{3}\sigma_1, \\ y_G &= \frac{1}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2) = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^2 + 2. \end{aligned}$$

Следователно,  $y_G = 9x_G^2 + 2$ , т.е. точката  $G \in \mathcal{P}_1$ .

Обратно, нека точка  $H(x_H, y_H) \in \mathcal{P}_1$  т.е. в сила е  $y_H = 9x_H^2 + 2$ . Да положим  $\sigma_1 = 3x_H$ ,  $\sigma_2 = -3 - \sigma_1^2$ ,  $\sigma_3 = \frac{-7\sigma_1 - 3\sigma_1^3}{3}$ . Уравнението  $x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$  има три комплексни корена  $x_A, x_B, x_C$ . Изчислява се<sup>2</sup>

$$(-27)\sigma_3^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 = \frac{4(4\sigma_1^2 + 9)^2}{3} > 0.$$

Следователно  $x_A, x_B$  и  $x_C$  са три различни реални числа и точките  $A(x_A, x_A^2)$ ,  $B(x_B, x_B^2)$  и  $C(x_C, x_C^2)$  са три различни точки от  $\mathcal{P}$ .

Освен това,  $x_A, x_B$  и  $x_C$  са корените на уравнението

$$3x^3 - 3\sigma_1 x^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0.$$

Прилага се Лема 2.1 и се получава, че отсечките  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  имат равни дължини.

Точка  $H(x_H, y_H)$  е медицентър на  $\triangle ABC$ , защото

$$\begin{aligned} x_H &= \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \\ y_H &= \sigma_1^2 + 2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \frac{1}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2). \end{aligned} \quad \square$$

<sup>2</sup>Изчислението е направено с МАХИМА [7].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] O. FRINK, F. UNDERWOOD. 3565. *The American Mathematical Monthly*, **40** (1933), No 6, 372–373, [www.jstor.org/stable/2301542](http://www.jstor.org/stable/2301542).
- [2] P. GORKIN, E. SKUBAK. Polynomials, Ellipses, and Matrices: Two Questions, One Answer. *The American Mathematical Monthly*, **118** (2011), No 6, 522–533. [www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.06.522](http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.06.522).
- [3] D. KALMAN. An Elementary Proof of Marden’s Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **115** (2008), No 4, 330–338, doi:10.1080/00029890.2008.11920532.
- [4] M. AT. STANEV. Locus of the centroid of the equilateral triangle inscribed in an ellipse. *International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)*, **4** (2019), 54–65, <http://www.journal-1.eu/>.
- [5] R. WOODS. Some Lines and Curves Associated with the Plane Triangle. *The American Mathematical Monthly*, **35** (1928), No 8, 428–431, doi:10.2307/2299770.
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner\\_inellipse](https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_inellipse) (посетена на 2019.09.03)
- [7] Computer Algebra System Maxima, <http://maxima.sf.net>, Maxima: ver. 5.42.0, Lisp: CLISP 2.49.92, wxMaxima 18.10.1.
- [8] GeoGebra, <http://www.geogebra.org/>, ver. 5.0.237.0-3D.

Мартин Станев  
Катедра „Математика и физика“  
Лесотехнически университет  
бул. „Климент Охридски“ № 10  
София, България  
e-mail: martin\_stanev@yahoo.com

## LOCUS OF THE CENTROIDS OF THE EQUILATERAL TRIANGLES INSCRIBED IN A PARABOLA

Martin Stanev

The locus of the centroids of the equilateral triangle inscribed in a parabola is also a parabola. The proof features some capabilities of the computer algebra system MAXIMA and the dynamic geometry software *GeoGebra*.