МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРАН ПОДХОД ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА ПРОГРЕСИИ

Евгения Вецева

В статията се анализират основни схващания за реализацията на проблемност при обучението по математика с цел повишаване на интереса и мотивацията на учащите, както и активизиране на творческите им способности. Предлагат се идеи за прилагане на проблемност при изучаване на прогресии. Включени са разнообразни примери за организиране на вътрешнопредметни и междупредметни връзки, нестандартни и творчески задачи, задачи от тип ребуси, задачи свързани с логическа организация на твърденията и пр., основна цел на които е да изграждат у учениците желание и умения за самостоятелно придобиване на знания.

Въведение. Проблемът с активизирането на учениците винаги е бил във фокуса на образованието. През първата половина на 20. век на основата на психологическите изследвания в областта на мисленето и усвояването на знания и на изследователския подход в образованието започват да се формират идеите за учене чрез решаване на проблеми (Дж. Дюи, Дж. Брунер, У. Килпатрик и др.). Формирането на теорията на проблемно-базираното обучение се свързва преди всичко с името на С. Л. Рубинщайн, който определя проблемната ситуация като начало, отправен момент, на процеса на мислене и очертава етапите на този процес. Впоследствие редица автори (А. М. Матюшкин [4], М. И. Махмутов, В. Окон [6], Л. М. Фридман) изследват ролята на проблемните ситуации в мисленето по време на обучение и развиват идеите на обучението, базирано на проблеми, до степен, в която то преминава в система.

Същност на обучението, базирано на проблеми. Познавателната дейност, процесът на мисленето, винаги възниква там и тогава, когато човек се сблъсква с някакво интелектуално затруднение – поставен в нови условия, той не може да приложи известните му от по-рано способи на действие и му е необходимо да открие нов способ. Психологията определя тези ситуации като проблемни. Те са еднакво възможни както за изпълнението на практически действия, така и за умствени, интелектуални действия. Познавателната потребност поражда такава интелектуална дейност, която позволява откриването на нови знания.

А. М. Матюшкин определя [4, с. 32] проблемната ситуация като „специфичен вид взаимодействие между субекта и обекта. Тя се характеризира преди всичко с

2020 Mathematics Subject Classification: 97D40.
Ключови думи: обучение по математика, проблемно-базирано обучение, прогресии.

определено психологическо състояние на субекта (ученика), възникващо в процес на изпълнение на такова задание, в което се търсят да се открият, усвоят, нови знания за предмета (цел), за способи за действие или условия на изпълнение на заданието."

Българските автори Л. Портев, В. Милушев и др. приемат следното сходно схващане за понятието проблемна ситуация: „определено психическо състояние на субекта, възникнало при взаимодействието му с предмета на неговата дейност, когато се осъзнават известни интелектуални затруднения при обясняване на установени противоречия между знанията на субекта и нови факти и явления, затруднения в обясняване или извършване на желана практическа дейност" [7, с. 11]. Те открояват две страни на проблемните ситуации: предметно-съдържателна (новото знание е под формата на неизвестно и се характеризира с някаква степен на общност – общ модел, който трябва да се усвои, общ начин на действие или някои общи условия за извършване на действието) и личностно-мотивационна (изпълнението на проблемната задача трябва да породи у ученика потребност от усвояване на знания).

В нашето изследване ще се опираме на горното схващане, като считаме, че ученикът трябва да забележи и осъзнае затруднението си и да пожелае да го отстрани. Възникналата проблемната ситуация може да бъде съпътствана с „удивление, раздразнение, неувереност и подбуда, желание за излизане, преодоляване на ситуацията" [6, с. 11]. В този смисъл учителят не може да създава проблемни ситуации, а само условия за възникването им. Проблемът трябва да предизвиква чувство на неудовлетвореност от наличния запас от знания, умения и навици и желание да се разреши. Това води до повишена мотивация за придобиване на нови знания и до активиране на мисловните процеси с цел преодоляване на възникналото затруднение.

От друга страна, затруднението трябва да е в границите на познавателните възможности на субекта – творческите му способности и достигнатото до момента ниво на знания трябва да бъдат достатъчни за самостоятелно анализиране и разбиране на поставеното задание и условията за неговото изпълнение.

Учебната проблема [7, с. 11] възниква от анализа на създадената проблемна ситуация. Тя е знаков израз, модел на проблемната ситуация, описание на обекта на проблемната ситуация на някакъв език. Централен елемент на проблемната ситуация е субектът, поради което проблемната ситуация не може да се предава от един субект на друг, докато *проблемата* е обективно съществуващ продукт на субекта и може да се предава. Портев подчертава: „Всяка проблема е задача, но не всяка задача е проблемна. Задача, която по отношение на даден субект води до създаване на проблемна ситуация, се нарича проблемна задача" [7, с. 12]

Възникналата проблемна ситуация трябва да се анализира от учителя. Той трябва да разкрие пред учениците причините за затруднението и неизпълнението на представената задача. Такова фиксиране върху проблемната ситуация подчертава образователния характер на проблемната задача, поставена на ученика, и определя областта на търсене на неизвестното. То завършва етапа на възникване на проблемната ситуация и представлява необходима преходна връзка към обяснението на учебния материал, изискван от проблемната ситуация. При нужда от снижаване на равнището на проблемност, проблемната задача се преформулира, разделя се на подпроблеми. Една и съща проблемна ситуация може да бъде причинена от различни видове проблемни задачи и въпроси: теоретични, практически, задания за упражнения и пр.

Проблемно-базирано обучение в часовете по математика. В. Окон [6] подчертава, че поставянето на *проблемата* пред учениците в процеса на усвояване на нови знания и действия е важно, но само по себе си не е достатъчно за създаване на оптимални условия, осигуряващи творческо усвояване на знания. Условията, които го предхождат, също са определящи за един успешен процес на усвояване.

Ние считаме, че за успешно проблемно базирано обучение е необходима предварителна подготовка както на учителя, така и на учениците. Майсторството на учителя според В. Окон се състои „не само в подбиране на роли за учениците, а преди всичко в разработване на сценария“ [6, с. 78], т.е. в разработка на адекватни за усвояваното съдържание проблемни задачи и въпроси, активизиращи мисловния процес на учениците. Проблемната задача трябва да е с достъпна формулировка – терминологията да бъде позната или близка до житейския опит на учениците. Проблемната ситуация трябва да възниква естествено, без натрапване, в хода на учебния процес и да предизвика интереса на учениците, да прикове тяхното внимание. Постановката на задачата трябва да се отличава с относителна трудност, която да мобилизира желанието им да я преодолеят, но да не бъде толкова трудна, че да стане непосилна за тях и да подкопае вярата в собствената им сила. Учебното съдържание, подлежащо на усвояване, също е от значение. Считаме, че проблемно-ориентираният подход не е подходящ в началните уроци от разделите, в които се усвояват нови факти, понятия и термини, но е особено ефективен в темите, свързани с изучаване на зависимости и закономерности.

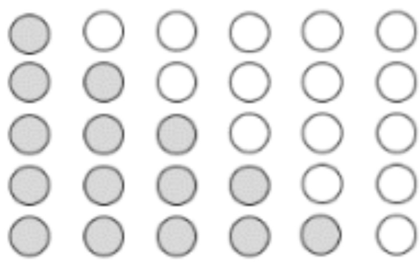
Във всеки момент по време на учебния процес могат да се създават условия за възникване на проблемни ситуации. Проблемни ситуации в обучението възникват, когато предишните знания на учащите са недостатъчни за обяснение на нови факти или когато учениците са изправени пред необходимостта да използват предварително придобити знания в нови практически условия. Лесно възниква проблемна ситуация и тогава, когато има противоречие между теоретично възможния начин за решаване на проблема и практическата неосъществимост на избрания метод или при липсата на знания на учениците за теоретично обосноваване на практически постигнатия резултат от изпълнение на учебна задача. Резултатите, получени от аналогия, интуиция, обобщение и недостатъчните знания за теоретичното им обосноваване също създават условия за възникване на проблемни ситуации.

Бихме могли да обобщим, че проблемно-ориентираният подход се реализира чрез създаване на условия за възникване на проблемна ситуация, формулиране на проблема, оказване на необходимата помощ на учениците в разрешаване на проблема, проверка на решенията и накрая – ръководене на процеса на систематизация и затвърдяване на придобитите знания. Една от основните цели на проблемно-базираното обучение е развитието на мисленето на учениците и изграждане на умения за самостоятелно придобиване на знания. Проблемно-базираното обучение осигурява стабилност на мотивите за учене, предизвиква познавателен интерес, активизира мисленето на учениците, създава възможности за личностна изява.

Реализиране на проблемност при изучаване на прогресии. В настоящото изложение представяме идеи за използване на проблемно-ориентиран подход при изучаване на темите за аритметична и геометрична прогресия.

Аритметична прогресия. Историческите сведения за някакво познание и нуждата, която го е породила, могат успешно да се използват за създаване на условия за възникване на проблемна ситуация. Целесъобразно е урокът за аритметична прогресия да започне с историята на гениалния математик Карл Фридрих Гаус. Историята, разказвана на деца и възрастни по целия свят повече от век, е следната. Учителят по математика на третокласника Фридрих Гаус иска да ангажира за по-дълго време него и неговите съученици и за целта им дава задача да сумират числата от 1 до 100. За негова изненада десетгодишния Гаус се справя със заданието за няколко минути.

Някои от учениците вероятно може да са запознати с метода на Гаус и бързо ще се справят със задачата да сумират първите 100 числа, но сигурно и за тях ще е изненада да научат, че всъщност Гаус не е първооткривателят на алгоритъма за лесно сумиране на последователни числа. Формулата е била известна още по времето на Евклид. Сумата на числата от 1 до 5 може да се представи така:



Т.е. сумата на числата от 1 до 5 е равна на половината от произведението на 5 и 6. Естествено възниква въпросът може ли да се приложи методът на Гаус, а и на древните гърци, за да се събират например четни числа, числа с разлика 3, -3 и пр.

Логическата организация на няколко твърдения за един и същ обект също може да се използва за възникване на проблемни ситуации.

След въвеждане на понятието аритметична прогресия, на учениците може да се постави следната задача.

Пример 1. Редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ е аритметична прогресия. Кои от следните твърдения са еквивалентни? Кои от тях могат да се използват за определение на понятието „аритметична прогресия“?

а) за всяко $k \in \mathbb{N},\ 2 \leq k \leq n-1,\ 2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$;

б) за всяко $k \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{R},\ d \neq 0,\ a_k = a_1 + (k-1)\,d$;

в) $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1}$;

г) редицата $\ln(a_1 d^0),\ \ln(a_1 d^1), \ln(a_1 d^2), \ldots, \ln(a_1 d^{n-1})$ е аритметична прогресия;

д) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$ за всяко $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$.

Тази задача изисква задълбочена изследователска дейност и спомага за по-пълното опознаване на математическите обекти.

По-нататък урокът може да продължи със задача за доказване.

Пример 2. Докажете, че редицата, зададена със следната формула за n-тия член $a_n = 5n - 7$, е аритметична прогресия.

Необходимостта от приложение на знанията в нови условия и творческият подход в по-нестандартните математически задачи също могат да се използват за активиране на учениците и предизвикване на познавателен интерес. За тази цел могат да се използват следните примери.

Пример 3. Трицифрените числа $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят всички тройки числа, за които това е изпълнено.

Пример 4. Намерете сумата:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+2022}$$

Решение. Прилагайки формулата за сума за аритметична прогресия, се стига до:

$$\frac{2}{2.1}+\frac{2}{3.2}+\frac{2}{4.3}+\frac{2}{5.4}+\ldots+\frac{2}{2023.2022}$$
$$=2.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right).$$

В предложените примери знанията за аритметични прогресии не могат да се приложат в готов вид и това ги прави проблемни за повечето ученици. Изправя ги пред необходимостта да систематизират и комбинират вече придобити знания с новото знание, за да изведат начини за решаване на цели класове задачи.

Преди да се пристъпи към решението, е добре да се актуализират знанията за египетски дроби, изучени в 6 клас.

Аналогията също намира широко приложение в проблемно-ориентираното обучение. Не само при пренасяне на твърдения от една тема в друга, но и при опит за съставяне на аналогични задачи на дадена. Ако учениците бъдат подканени да съставят задачи, аналогични на задачата от пример 4, може да се стигне до следната ситуация:
за израза

$$1+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}+\cdots+\frac{1}{2+4+6+8+\ldots+2022}$$

учениците ще стигнат до решение, подобно на пример 4, но сумата

$$1+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+\ldots+\frac{1}{1+3+\cdots+2023}$$

ще доведе до нужда от подходящо групиране на знаменателите на четни и нечетни.

Пример 5. Намерете сумата

$$\frac{1}{\sqrt{225}+\sqrt{230}}+\frac{1}{\sqrt{230}+\sqrt{235}}+\frac{1}{\sqrt{235}+\sqrt{240}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{620}+\sqrt{625}}.$$

Пример 6. Изчислете сумата $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+2021^2-2022^2$.

Пример 7. Двадесет и вторият и двадесет и осмият член на аритметична прогресия се отнасят както 1:3. На колко е равен деветнадесетият ѝ член?

Пример 8. Четири цели различни числа образуват аритметична прогресия. Едно от тях е равно на сумата от квадратите на останалите три числа. Намерете тези числа.

(**Упътване:** При разглеждане на полученото квадратно уравнение, в което d се разглежда като параметър, дискриминантата е неотрицателна в интервал, в който единствените цели числа са 0 и 1).

При подготовката на задачи за урока учителят трябва да използва всички средства, за да привлече вниманието на учениците и да ги заинтригува. Това лесно може да се постигне със задачи от тип ребуси и игри. Те са на пръв поглед познати на учениците, които не очакват да срещнат затруднение и се впускат с ентусиазъм в разрешаването им. Но достигането до вярното решение ще изисква от тях време, търпение и задълбочено изследване на логическите връзки. Накрая може би сами ще осъзнаят, че колкото по-труден е пътят, толкова по-голямо е удовлетворението от постигнатия успех.

Пример 9. Дадена е аритметичната прогресия $-5, -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19$. Могат ли да се нанесат членовете ѝ в таблица 3×3, така че да образуват магически квадрат (сумите по всеки ред, стълб и по двата диагонала трябва да са равни). С всяка аритметична прогресия ли може да се получи такъв квадрат? Може ли да се определи магическият сбор без да се попълва квадратът? Кой от членовете на прогресията трябва да се постави в центъра на квадрата?

$a+1d$	$a+6d$	$a+5d$
$a+8d$	$a+4d$	$a+0d$
$a+3d$	$a+2d$	$a+7d$

Пример 10. Дадена е таблица 4x5, както е показано. Попълнете таблицата така, че числата във всеки стълб и ред на таблицата да образуват аритметична прогресия.

1				
	7			
		19		
				48

Пример 11. Можете ли да съставите таблица, подобна на тази в пример 9? Най-малко колко числа трябва да са зададени предварително, за да може да се състави такава таблица? На какви позиции трябва да са поставени те?

Необходими са 4 числа за съставяне на такава таблица.

разлика	r	x	$2x-r$	$3x-2r$	$4x-3r$
d	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$
$d+x-r$	$a+r$	$a+d+x=a+r+d+x-r$	$a+2d+2x-r$	$a+3d+3x-2r$	$a+4d+4x-3r$
$d+2x-2r$	$a+2r$	$a+d+2x=a+2r+d+2x-2r$	$a+2d+4x-2r$	$a+3d+6x-4r$	$a+4d+8x-6r$
$d+3x-3r$	$a+3r$	$a+d+3x=a+3r+d+3x-3r$	$a+2d+6x-3r$	$a+3d+9x-6r$	$a+4d+12x-9r$

Предишният пример съответства на системата $\left|\begin{array}{l} a=1 \\ a+d+x=7 \\ a+2d+4x-2r=19 \\ a+4d+12x-9r=48 \end{array}\right.$

Откъдето лесно намираме $r=1$, $x=4$, $d=2$ и попълваме таблицата.

Организирането на вътрешнопредметни и междупредметни връзки не само е средство за възникване на проблемни ситуации, но и добре илюстрира различни приложение на новото знание и мотивира нуждата от изучаването му.

Пример 12. Съществува ли триъгълник, на който и ъглите, и страните да образуват аритметична прогресия [1]?

Упътване. Докажете, че единият ъгъл е 60° и разгледайте косинусова теорема.

Пример 13. Какъв е видът на четириъгълник, ъглите на който, разгледани последователно по посока на часовниковата стрелка, образуват аритметична прогресия?

Пример 14. Четирите страни на четириъгълник образуват аритметична прогресия. Може ли в него да се впише окръжност?

Пример 15. В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle CDA$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия, а за страните му е известно, че $BC = CD$ и $AB = AD + BC$. Намерете ъглите на четириъгълника.

Пример 16. Ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия, а най-голямата му страна е четири пъти по-голяма от най-малката. Намерете тангенса на най-малкия му ъгъл.

Предложената серия от задачи от аритметична прогресия допринасят за развитие на мисленето на учениците и за изграждане на умения за самостоятелно придобиване на знания.

Геометрична прогресия. За да се гарантират принципите за достъпност, активност и съзнателност в обучението, от съществено значение е то да се опира на жизнения опит на учениците и на ситуации и примери от тяхното ежедневие. И тъй като примерите за геометрични прогресии са навсякъде около нас, целесъобразно е въведението в темата да стане чрез добре позната на учениците от практиката задача.

Пример 17. В началото на 2003 родителите на Борис са открили на негово име влог с начална сума 10 000 лв. и годишна сложна лихва 6% (лихвата се начислява в края на всяка календарната година върху главницата и натрупаните до момента лихви). През 2022 Борис е приет в престижен чуждестранен университет с годишна такса 10 000 лв. и бакалавърска програма за срок от 3 години. Каква част от таксата за колежа ще може да покрие Борис със събраните във влога пари (към края на 2021 г.)?

Пример 18. Работници се заели да копаят кладенец на заможен стопанин. Поискали 1000 лева, но на него му се видяло скъпо. Тогава най-старият от тях му казал: „Плати ни 1 лев за първия метър, 2 лева за втория, 4 лева за третия метър, 8 лева за четвъртия и т.н. Ние не искаме повече.“ На стопанина му се сторило евтино и той се съгласил. Колко пари е платил, ако кладенецът е дълбок 12 метра?

В тази тема отново може да се състави задача за логическа организация на твърдения:

Пример 19. Редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ е геометрична прогресия. Кои от следните твърдения са еквивалентни? Кои от тях могат да се използват за определение на понятието „геометрична прогресия“

а) За всяко $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n-1$, $a_k^2 = a_{k-1}.a_{k+1}$;

б) За всяко $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, $a_k = a_1.q^{k-1}$;

в) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$;
г) редицата $\ln a_1,\ \ln a_2, \ln a_3, \ldots, \ln a_n$ е аритметична прогресия;
д) $a_1.a_n = a_2.a_{n-1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

По аналогия на аритметичната прогресия учениците могат сами да определят как се изменят членовете в зависимост от частното; да изведат формула за n-тия член; да открият и докажат свойствата на членовете на геометрична прогресия; да изразят произведението и сумата на първите n члена, изразени чрез първия и последния.

Пример 20. С помощта на формулата за сумата на първите n-члена да се докажат тъждествата:

$$q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$$
$$q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$$
$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + \cdots + q + 1)$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^n + \cdots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1})$$

Търсенето на практически приложения на новопридобитите знания също могат да са в основата на проблемни ситуации. Могат ли знанията за геометрична прогресия да помогнат на съобразителната домакиня в кухнята?

Пример 21. Мария обича да пече сладкиши. Тя е забелязала, че когато оставя тестото за кифлички да втасва, то увеличава обема си с 20% на всеки 15 мин. В 10:00 Мария оставя тестото да втасва и отива в другата стая да гледа телевизия. В колко часа трябва да се върне Мария в кухнята, за да не излезе тестото от купата, ако купата е с обем 3 л и в началото тестото заема 1/3 от обема на съда? (Мария може да използва калкулатора на телефона си).

Задачите с игри от темата „Аритметична прогресия“ могат да бъдат пренесени по аналогия и тук.

Пример 22. Могат ли първите девет члена на геометрична прогресия да се нанесат в таблица 3×3, така че да се образува магически квадрат с умножение (произведенията по всеки, ред, стълб и по двата диагонала да са равни). Дайте пример. Кой от членовете на прогресията трябва да се постави в центъра на квадрата?

bq^1	bq^6	bq^5
bq^8	bq^4	bq^0
bq^3	bq^2	bq^7

Пример 23. Дадена е таблица 4×5 както е показано. Попълнете таблицата така, че числата във всеки стълб и ред на таблицата да образуват геометрична прогресия. А можете ли да съставите такава таблица сами. Най-малко колко числа трябва да са зададени предварително, за да може да се състави такава таблица? На какви позиции трябва да са поставени те [2, с. 16]?

	3			
		18		
				324
8				

	a	b			
c	x	xc^1	xc^2	xc^3	xc^4
$\left(\frac{b}{a}\right)^1.c$	xa^1	$xa^1.\ \left(\frac{b}{a}\right)^1.c$	$xa^1.\ \left(\frac{b}{a}\right)^2.c^2$	$xa^1.\ \left(\frac{b}{a}\right)^3.c^3$	$xa^1.\ \left(\frac{b}{a}\right)^4.c^4$
$\left(\frac{b}{a}\right)^2.c$	xa^2	$xa^2.\ \left(\frac{b}{a}\right)^2.c$			
$\left(\frac{b}{a}\right)^3.c$	xa^3	$xa^3.\ \left(\frac{b}{a}\right)^3.c$			

Неудобството да се приложи познат теоретичен метод в дадена задача също изправя учениците пред предизвикателството да търсят нови, творчески приложения на своите знания. Следната, на пръв поглед „рачешка“ задача, съдържа доста големи числа, неудобни за пресмятане и налага по-задълбочено изследване, което ще доведе до разкриване на рационален метод чрез използване на свойствата на геометричните прогресии.

Пример 24. Витан има вълшебна кутия. Той слага в нея число, а тя го удвоява и добавя 23. Той взима полученото число и отново го слага в кутията. След като кутията проработила 10 пъти, финалното число било 3163 пъти по-голямо от оригиналното число. Какво е било началното число, което Витан е сложил в кутията?

Едно от възможните упътвания към учениците, с цел понижаване равнището на проблемност, е да разгледат следната таблица, като числото 23 заменят за удобство с променливата y.

Поредно слагане в кутията	Подавано към кутията число	Резултат	Образуване на коефициента пред y
1	x	$2x+y$	1
2	$2x+y$	$4x+3y$	$2+1$
3	$4x+3y$	$8x+7y$	$4+2+1$
4	$8x+7y$	$16x+15y$	$8+4+2+1$
...			

Най-наблюдателните ученици ще забележат, че коефициентите пред x образуват геометрична прогресия с частно 2, т.е. на n-то поредно слагане в кутията коефициентът пред x ще намерим по формулата за $(n+1)$-вия член $a_n = a_1q^{n-1}$ (n пъти сме извършили действието), а този пред y ще намерим по формулата за сума на геометрична прогресия $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$.

Тогава след 10-то слагане кутията ще върне резултат: $2^{10}x + \left(2^{10}-1\right)23 = 3163x$

Отново можем да използваме вътрешнопредметни връзки:

Пример 25. Намерете сумата на безкрайната числова последователност.
$\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cdots$, при $\alpha = 150°$
$\sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \cdots$, при $\alpha = 30°$.

Пример 26. В триъгълник ABC ъглите образуват геометрична прогресия с частно две. Да се докаже, че $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Пример 27. Даден е квадрат със страна 2 см. Средите на страните на дадения квадрат са върхове на втори, по-малък квадрат. Средите на страните на втория квадрат са върхове на трети квадрат и т.н. Да се намери сборът от лицата на всички образувани по този начин квадрати [3].

Пример 28. Върху куб със страна 6 см поставили друг куб с два пъти по-малка страна, и продължили да поставят отгоре кубове, всеки със страна, два пъти по-малка от тази на предишния. Да се намери височината на получената фигура.

Пример 29. Дължините на страните на триъгълник с тъп ъгъл $120°$ образуват аритметична прогресия.

а) Ако двете по-малки страни са означени с a и b, докажете, че $3b = 5a$.

б) Ако разликата на аритметичната прогресия е 4, намерете периметъра на триъгълника.

Можем да организираме и междупредметни връзки:

Пример 30. Чехълчето е едноклетъчно животно от тип „ресничести“, което в благоприятни условия на всеки 12 часа се възпроизвежда чрез разделяне на клетката на 2 части. Колко чехълчета е имало първоначално, ако след шесткратно деление броят им е 320?

Комбинации от прогресии. Задачите, комбиниращи аритметични и геометрични прогресии могат да се окажат проблемни за много от учениците. Те изискват не само задълбочено познаване на учебния материал, но и много вдъхновение и творческо мислене.

Проблемата в следващите примери е как да се преобразува условието, за да се приложат знанията и уменията за прогресии.

Пример 31. Дадена е безкрайна редицата $\frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{6}{75} + \frac{8}{375} + \dots$, в която числителите са членове на аритметична прогресия, а знаменателите – на геометрична. Да се намери сумата на редицата.

Решение. Да означим търсената сума с S и да разгледаме израза $S - \frac{1}{5}S$

$$S - \frac{1}{5}S = \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{6}{75} + \frac{8}{375} + \dots - \frac{2}{15} - \frac{4}{75} - \frac{6}{375} - \dots$$

$$\frac{4}{5}S = \frac{2}{3} + 2.\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{75} + \frac{1}{375} + \dots\right)$$

Могат да се съставят многобройни задачи от същия тип.

Пример 32. Намерете сумата на безкрайната числова последователност $a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots$, при $|a|<1$.

Упътване. $(S - \frac{1}{a}S)$

Могат да се съставят много подобни редици

$a - 2a^2 + 3a^3 - 4a^4 + \cdots$, при $|a| < 1$;

$a + 2a^2 + 4a^3 + 6a^4 + \cdots$, при $|a| < 1$;

$\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 3\cos^3\alpha + \cdots$, при $\alpha = 150°$.

Пример 33. Цифрите на едно трицифрено число образуват аритметична прогресия. Ако към него прибавим 212, цифрите на полученото число образуват геометрична прогресия. Кое е числото?

Пример 34. Три числа образуват растяща аритметична прогресия. Ако към последното прибавим 12, ще получим геометрична прогресия със сума на членовете 39. Да се намерят числата. (Отг. 3, 9, 15)

Пример 35. Три числа образуват геометрична прогресия. Ако от третото число извадим 8, получаваме аритметична прогресия. Ако от второто и третото число на новата прогресия извадим първото, отново ще получим геометрична прогресия. Да се намерят числата. (Отг. 2, 6, 18)

Пример 36. Три числа образуват геометрична прогресия. Ако второто число увеличим с 8, редицата става аритметична прогресия, а ако след това последното число увеличим с 144, тя отново става геометрична прогресията. Да се намерят числата.

Пример 37. Три числа, чиято сума е 43 образуват геометрична прогресия, но могат да бъдат разгледани и като първи, втори и осми член на аритметична прогресия. Да се намерят дадените три числа. (Отг. 1, 6, 36)

Пример 38. Разликата на аритметична прогресия е различна от нула. Числата, равни на произведенията на първия и втория член на тази прогресия, на втория и третия и на третия и първия, образуват в този ред геометрична прогресия. Намерете нейното частно!

Пример 39. Три различни числа a, b и c, взети в този ред, образуват геометрична прогресия, а числата $(a + b)$, $(b + c)$ и $(a + c)$, взети също в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намери нейното частно [5, с. 166].

(**Упътване.** Да се съобрази, че $q < 0$. След изразяване на $b \ = 2a - c$ се стига до хомогенното уравнение $c^2 - 5ac + 4a^2 = 0$.)

Заключение. В заключение ще отбележим, че нашият опит от прилагането на проблено-ориентирано обучение в уроците по математика показва, че то действително повишава научното ниво на обучението и неговата ефективност, съдейства за овладяване на методите на научно изследване и начините за решаване на практически и образователни проблеми, подпомага развитието на интелекта на учениците и тяхното изграждане като цялостни и хармонично развити личности. Същевременно възпитава у тях наблюдателност и самокритичност, настойчивост към преодоляване на препятствия, развитие на волята, смелост в търсенето, защита на собствена гледна точка, сформиране на собствено отношение към света.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Данаилова-Стойнова, П. Данчев. Осъществяване на вътрешнопредметни връзки в обучението по математика – тригонометрични функции и прогресии. *Математика и информатика*, бр.1 (2018), 49–58.

[2] Л. М. Лоповок. Тысяча проблемных задач по математике, Кн. для учащихся. М., Просвещение, 1995.

[3] Р. Маврова, П. Рангелова. Обвързване на обучението по алгебра и геометрия. *Математика и информатика*, бр. 2 (2016), 183–192.

[4] А. М. Матюшкин. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., Педагогика, 1972.

[5] А. Мордкович, Н. Николаев, П. Семенов. Алгебра 9 класс. Углублённый уровень, 2 часть. М., Мнемозина, 2019.

[6] В. Окон. Проблемното обучение. С., Народна просвета, 1986.

[7] Л. Портев, В. Милушев, Н. Николов, М. Маврова. Проблемност при обучението по математика. С., Народна просвета, 1983.

Евгения Вецева
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски"
ул. Цар Асен № 24
4000 Пловдив, България
e-mail: e.vetseva@gmail.com

A PROBLEM-BASED APPROACH IN TEACHING PROGRESSIONS

Evgeniya Vetseva

The article analyzes basic concepts about the implementation of the problem-based approach in mathematics education. The main goal is to increase the interest and motivation of students and activate their creative abilities. Ideas are offered for applying the problem-based method in teaching progressions. The author provides various examples of organizing intra-subject and inter-subject connections, non-standard and creative problems, rebuses, problems related to the logical organization of definitions, etc. They are selected to inspire students and practice their skills to reach new knowledge by themselves
Key words: Mathematics teaching, problem-based learning, sequences.