

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ И КОМБИНАТОРИКАТА
В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА*

Десислава Георгиева

Определено е състоянието на въпроса, свързан с изучаването на *Теория на вероятностите* и *Комбинаториката* в училищния курс по математика в България и причините за необходимостта от методическо разработване на тези теми. Анализирани са учебниците по математика. Предложени са идеи за преодоляване на съществуващите проблеми.

Въведение. Историческият преглед на изучаването на *Теория на вероятностите* и *Комбинаториката* в българското училище установява, че елементи от тези теории се срещат още през 1886 година. Тези теми търпят промени по своето съдържание и място в учебните програми по математика [36].

Съгласно действащата учебна програма в 6. клас [26] се въвеждат понятията: *подмножество*, *случайно събитие*, а в учебниците са добавени понятията *достоверно*, *невъзможно събитие* [27, 243 с.], [29, 228 с.], *класическа вероятност*, *благоприятна възможност* [29, 236 с.]. Седмокласниците организират и представят данни в таблици (алгебричен подход) и с кръгова диаграма (геометричен подход) [32]. От 8. клас оперират с умножение и събиране на възможности; *съединение без повторение*; *пермутации* без повторение; *вариации* и *комбинации* без повторение от n елемента k -ти клас; *граф-дърво* [37]. В 9. клас се надграждат знанията за *множества* (операциите допълнение и произведение на множества) и видове *случайни събития*. Въвеждат се *елементарно*, *съставно*, *случайно*, *благоприятно*, *достоверно*, *противоположно събитие*, *съвместими* и *несъвместими събития* [38]. Формират се умения за пресмятане на *вероятност на сума от несъвместими събития*, на *обединение и сечение на събития*, на *сума на съвместими събития*. В 11. клас се прави преговор на изученото и се разглеждат: *условна вероятност*; *независими събития*; модели на *многократни експерименти с два възможни изхода*; *геометрична вероятност върху права* и *геометрична вероятност в равнината* [39]. В 12. клас основно се изучава статистика, като се използват знанията за вероятности.

Необходимост от изучаване на *Вероятности* и *Комбинаторика*. Тези теми са едни от най-трудните в училищния курс по математика [25]. Причините за необходимостта от методическото им разработване са следните:

* 2020 Mathematics Subject Classification: 05-01.

Ключови думи: вероятности, комбинаторика, обучение, проблеми в образованието.

- *Комбинаториката* предоставя едно подходящо обединение на различни идеи в една задача, защото с нея се интерпретират редица въпроси по аритметика, геометрия, биология, химия и др.
- *Вероятностите* и *Комбинаториката* формират нов начин на мислене, различен от класическата математика.
- Реализират една от основните цели на STEM (Science – Technology – Engineering – Mathematics) обучението и компетентностния подход – обвързват теоретичните знания със заобикалящата действителност.
- Голяма част от събитията в живота на човек имат вероятностен характер и за изграждане на един успешен и траен бизнес са необходими познания, и в тези области. Тези теории служат за прогнозиране и изграждане на ефективни стратегии.
- Проведените ДЗИ показват незадоволителни резултати на учениците върху задачите от комбинаторен характер. Знанията остават неразбрани, не добре осмислени и неприложими за ситуации, различни от разгледаните в учебника.
- В учебните програми и в анализирани учебници [2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 40] упражненията са сведени до минимум (Таблица 1).

Таблица 1. Брой уроци за нови знания, за упражнение и налични тестове

Учебник №	Вероятности		Вер. и Стат.		Т.	Вероятности		Вер. и Стат.		Т.
	Н.З.	Упр.	Н.З.	Упр.		Н.З.	Упр.	Н.З.	Упр.	
	6. клас					7. клас				
[31], [32]	2	1	6	2	1	1	0	1	2	2
[27], [28]	2	0	6	2	3	1	0	1	1	3
[29], [30]	2	1	2	2	1	1	0	1	2	1
[17], [18]	2	1	3	2	0	0	1	1	1	0
[31], [32]	2	0	4	0	1	1	1	1	1	0
	8. клас					9. клас				
	Вероятности		Комбин.			Вероятности		Комбин.		
[33], [34]	0	0	4	2	1	6	3	0	0	2
[7], [8]	0	0	4	3	1	5	3	0	0	1
	11. клас					12. клас				
	Вероятности		Комбин.			Вероятности		Вер. и Стат.		
[2], [40]	7	2	0	0	2	0	0	1	1	1
[9], [10]	6	5	0	0	1	0	0	1	1	1

Като положителна характеристика може да се изтъкне, че авторите на анализирани учебници за усвояване на темите *вероятност* и *комбинаторика* са заложили в задачите познати на обучаваните теми от заобикалящата ни действителност (бит, спорт, социална сфера и т.н.). Единствено във „Вероятности и анализ на данни“ за профилирана подготовка по математика за 12. клас теорията на *Вероятностите* е представена научно и задълбочено.

Друга причина за въвеждането на тази теория в програмите за обучение е необходимостта от развиване на вероятностно мислене на учениците. В подкрепа на това твърдение се изказват крупни учени от миналото и настоящето, като Лаплас посочва: „Най-важните въпроси на живота са вероятностните“. Различните възможности

и вероятностите за сбъдването им определят мислене, диаметрално противоположно на класическото, където всичко е предвидимо, фиксирано и неизменно. Ще приведем следния пример в подкрепа на необходимостта от изучаване на тези теории:

Пример. Известно е, че една касиерка може да обслужи 50 купувачи за 1 час и че в конкретния магазин идват средно по 100 клиенти на час. Кой е най-разумният брой каси, които трябва да се поставят в този магазин?

Човек без познания ще отговори „две каси“, но ще допусне сериозна грешка. *Теорията за масовото обслужване*, базирана на *Теория на вероятностите*, доказва, че поради случайния характер на посещенията и вероятните отклонения във времената на обслужване на отделните клиенти, закономерностите за формиране на опашки от чакащи са такива, че за ефективното обслужване в случая са необходими три каси [20].

Списъкът от примери, един от друг по-убедителни, може да бъде продължен. Бездомността на *детерминистичните* познания в случаите, когато трябва да се решават задачи със *стохастичен* характер и нерядко вземаните погрешно решения, ни убеждават, че по-голямата част от нашите съвременници не са научени да мислят *вероятностно* [20].

Задачи от тези раздели спомагат за изграждане на компетенция за приложение на знанията в живота, затова комбинаторни задачи присъстват и в международното изследване PISA (Programme for International Student Assessment). Една от четирите теми в оценяването PISA 2022 е *Условно вземане на решения (вероятност и данни)*. Оценяването на математическата грамотност се фокусира върху измерването на способността на учениците да формулират, използват и интерпретират математическо познание в различни ситуации.

От 2012 година в НВО (Национално външно оценяване) за седми клас ежегодно са включвани задачи от тип PISA. Някои НВО за четвърти клас също съдържат комбинаторни задачи.

Предложения за преодоляване на съществуващите проблеми. Авторите на учебниците за Началното училище [1, 4, 5, 13, 14, 15, 16] са включили оскъден брой комбинаторни задачи, като в 3. клас присъстват повече такива задачи отколкото в 4. клас. Включени са задачи за запис на всички числа, образувани с всички дадени цифри, т.е. пермутации без повторение, и само две задачи за запис на многоцифрени числа с дадени по-малко на брой цифри, т.е. комбинации с повторение. Задачите, изискващи да се напишат конкретни комбинации от цифри, отговарящи на зададени условия, може да се разглеждат като задачи с елементи от комбинаториката, но не и като чисто комбинаторни, защото не се разглеждат или преброяват всички възможности. Геометрични задачи с елементи от комбинаториката са задачи за определяне броя на различните видове ъгли, изобразени като съседни, намиране на броя на триъгълници или правоъгълници от по-сложни чертежи, където се комбинират няколко (от две до четири) фигури, за да образуват една. Единични са задачите по карта (граф) с дадени маршрути, при които учениците да съставят сами различни задачи за придвижване.

Към момента, такъв тип задачи се разглеждат само на допълнителни курсове и кръжоци, а присъстват на голяма част от състезанията. Малките ученици се затрудняват с тези непознати за тях „логически“ задачи, които не се изучават в училище, и губят силното си желание за изява в математически състезания. Затова е необ-

ходимо в часовете по математика да се въвеждат и решават повече комбинаторни задачи в задължителната подготовка още в начална образователна степен. Те трябва да се изучават на пропедевтично ниво, като понятията се въвеждат остенсивно, без да се формулират определения.

В началното училище изучаването на *вероятностите* и *комбинаториката* внася редица нови и плодотворни идеи. Голяма е изненадата на мнозинството от по-големите ученици или на възрастни, когато открият съществуването на една математическа област, основана на понятието „може би“ [19]. Така, че колкото по-рано се включат вероятностните и комбинаторните понятия, толкова по-малък ще бъде рискът да се смята, че математиката е откъсната от ежедневието. Полезно е да се свържат тези теории със света на детето. Не е трудно да се намерят подходящи за това ситуации в естествената му среда, които да го доведат до задълбочени размисли. Нужни са насочени действия, за да възбудим естественото любопитство на малкия ученик, за да го накараме да се сблъска с действителността, и да преодолеем погрешните му представи, които той може да има.

Разбира се в началното училище ученикът няма да навлезе дълбоко в теория на *вероятностите* и *комбинаториката*, защото има два ограничаващи фактора: от една страна, относително краткото време на концентрация на детето върху дадена тема и, от друга страна, липсата на достатъчно усвоени математически средства. За да се смекчи въздействието на първия фактор, добре е да се избират привлекателни теми, представени по прост начин [19]. Що се отнася до втория фактор, той често е предопределен от самите учебни програми.

През следващите класове тези знания и умения трябва да бъдат разширявани и задълбочавани. С цел знанията да не бъдат забравени, а да се надграждат, е необходимо такива теми да присъстват през всички учебни години. Независимо от възрастта на обучаваните е добре преди решаване на част от задачите да се предлагат нагледни опори (материални обекти, изображения, схеми, диаграми и др.).

Авторите на учебника за 9. клас [8, 35с.] са съставили изключително полезна таблица за връзките между понятията и начина им на изказване чрез езиците на множествата, събитията и вероятностите. Подобни таблици трябва да присъстват във всички учебници за различните класове. Необходимо е знанията да се обобщават и систематизират, да бъдат показани връзката и различията между изучаваните понятия. Добре е да се използват и допълнителни задачи от сборниците [21, 22, 35], за да се подобрят уменията за прилагане на тези знания.

Добре е също да се предвидят достатъчно часове за упражнения. Например при изучаване на съединенията: *комбинации*, *вариации* и *пермутации*, те могат да се въведат в един урок, а предвидените в учебната програма часове да се използват за упражняване на придобитите по индуктивен път знания в различни ситуации. Не е необходимо да се изисква от учениците да запаметяват сложни формули, тъй като те се предоставят на външните оценявания и на матурите, а и всеки би могъл да ги открие в Интернет. По-важно е да знаят как е достигнато до изводите и как сами могат да ги възпроизведат. Изключително важно е да разбират изведените формули и да могат да преценят коя от тях да приложат в различните ситуации.

За да могат уверено и качествено да преподават, е необходимо бъдещите начални, прогимназиални и гимназиални учители да изучават в отделни теми по методика, как да преподават такъв тип знания.

Важно е педагозите да могат сами да съставят подобни на дадени задачи, за да осигурят на своите ученици, в зависимост от характеристиките на съответния клас, достатъчно упражнения върху система задачи с нарастваща сложност. Добре е да разнообразяват учебните часове, като използват мултимедийни ресурси, с които да онагледяват разглежданите практически ситуации, за да могат по индуктивен път учениците да достигнат до известните в науката формули. При по-малките ученици е подходящо да се включва и игровия подход и математически театър.

Заклучение. Изучаването на теория на *Вероятностите* и *Комбинаториката* е важно за развиване на мисленето на обучаваните и за изграждането им като успешни професионалисти. Към момента съществуват определени проблеми, свързани с обучението, но те могат да бъдат преодоленни чрез: промени в учебните програми; ранна пропедевтика; отделяне на повече учебно време за осмисляне и приложение на знанията; разработване на математическа и методическа литература; включване на тези теми в обучението на студентите и квалификационни курсове за учители.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. Алашка, А. Аврамова, П. Паскалев. Математика за 4. клас, София, „Архимед 2“ ЕООД, 2019.
- [2] М. Алашка, Р. Алашка, П. Паскалев. Математика 10. клас, София, „Архимед“, 2019.
- [3] Р. Алашка, М. Алашка, П. Паскалев. Математика 11. клас, София, „Архимед“, 2019.
- [4] В. АНГЕЛОВА, Ж. КОЛЕВА. Математика за 3. клас, „Просвета Плюс“ ЕООД, 2018.
- [5] В. АНГЕЛОВА, Ж. КОЛЕВА. Математика за 4. клас, „Просвета Плюс“ ЕАД, 2019.
- [6] К. БАНКОВ, Т. СТОЕВА, И. ЦВЕТКОВА, Д. ПЕТРОВА. Книга за учителя по математика за 8. клас, София, „Просвета“, 2017.
- [7] К. БАНКОВ и др. Математика за 8. клас, София, „Просвета – София“, 2022.
- [8] К. БАНКОВ и др. Математика за 9. клас, София, „Просвета – София“, 2022.
- [9] К. БАНКОВ и др. Математика за 10. клас, София, „Просвета – София“, 2019.
- [10] К. БАНКОВ и др. Математика за 11. клас, София, „Просвета – София“, 2022.
- [11] К. БАНКОВ и др. Математика за 12. клас, София, „Просвета – София“, 2021.
- [12] М. БОЖКОВА и др. Вероятности и анализ на данни. Профилирана подготовка по математика за 12. клас, София, „Просвета – София“, 2022.
- [13] М. БОГДАНОВА, М. ТЕМНИКОВА, В. ИВАНОВА. Математика за 3. клас, „Булвест 2000“, „Клет България“ ООД, 2018.
- [14] М. БОГДАНОВА, М. ТЕМНИКОВА, В. ИВАНОВА. Математика за 4. клас, „Булвест 2000“, „Клет България“ ООД, 2018.
- [15] Т. ВИТАНОВ, Г. КИРОВА, З. ШАРКОВА, И. ПУШКАРОВА, Д. ПАРУШЕВА. Математика за 3. клас, „Анубис“ ООД, 2018.
- [16] Т. ВИТАНОВ, Г. КИРОВА, З. ШАРКОВА, И. ПУШКАРОВА, Д. ПАРУШЕВА. Математика за 4. клас, „Анубис“ ООД, „Клет България“ ООД, 2019.
- [17] Т. ВИТАНОВ и др. Математика за 6. клас „Анубис“, „Клет България“ ООД, 2019.
- [18] Т. ВИТАНОВ и др. Математика за 7. клас „Анубис“, „Клет България“ ООД, 2019.
- [19] М. ГЛЕЙМАН, Т. ВАРГА. Вероятностите в училище, Държавно издателство „Народна просвета“, София, 1983, 5–6.
- [20] Б. ДИМИТРОВ, С. РАЧЕВ. Теория на вероятностите и математическа статистика, *Обучението по математика*, 41 (ГОДИНА), 5–12.

- [21] З. Запрянов, Ж. Маринкова. Сборник от задачи и тестове по комбинаторика, вероятности и статистика. София, „Труд“, ISBN: 9789545288159, 2008.
- [22] З. Запрянов, М. Маринов. Занимателна математика: Практикум по теория на вероятностите, комбинаторика и статистика за 10., 11., и 12. клас, Скорпио, 2018.
- [23] Е. Колев и др. Математика учебник за 6. клас, „Булвест 2000“, „Клет България“ ООД, 2017.
- [24] Е. Колев и др. Математика учебник за 7. клас, „Булвест 2000“, 2018.
- [25] Ю. Кръстева. Интеграционен модел за обучение по комбинаторика в училище, Автореферат на дисертационен труд за присъждане на образователна и научна степен „доктор“, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, 2013.
- [26] Министерство на образованието, учебна програма по математика 6. клас.
- [27] Ю. Нинова, С. Матакиева, Т. Бонина-Христова, Н. Райков. Математика за 6. клас. София, „Просвета Плюс“ ЕООД, 2017.
- [28] Ю. Нинова, С. Матакиева, Н. Райков, Т. Бонина-Христова. Математика за 7. клас. София, „Просвета Плюс“ ЕООД, 2021.
- [29] П. Нинкова и др. Математика за 6. клас, София, „Просвета – София“, 2017.
- [30] П. Нинкова и др. Математика за 7. клас, София, „Просвета – София“, 2021.
- [31] З. Паскалева, М. Алашка, Р. Алашка. Математика 6. клас, София, „Архимед“, 2017.
- [32] З. Паскалева, М. Алашка, Р. Алашка. Математика 7. клас, София, „Архимед“, 2018.
- [33] З. Паскалева, М. Алашка, П. Паскалев, Р. Алашка. Математика 8. клас, София, „Архимед“, 2017.
- [34] Г. Паскалев, М. Алашка, Р. Алашка. Математика 9. клас, София, „Архимед“, 2018.
- [35] Ц. Стоилкова. Сборник по комбинаторика и вероятности, София, Рая, 2015.
- [36] Н. Тончева, Й. Йорданова. Исторически преглед на изучаването на теория на вероятностите и статистика в българското училище в периода 1945–2005 г. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 417–421.
- [37] Учебна програма по математика за 8. клас, Министерство на образованието.
- [38] Учебна програма по математика за 9. клас, Министерство на образованието.
- [39] Учебна програма по математика за 11. клас, Министерство на образованието.
- [40] М. Христов, Е. Стоименова, Ю. Цветков, Ц. Байчева. Математика за 12. клас. Задължителна подготовка, „Клет България“ ООД, 2020.

Десислава Георгиева
 Факултет „Математика и информатика“
 ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“
 Бул. „Арх. Георги Козаров“ № 1
 5000 Велико Търново, България
 e-mail: dmgeorgieva2@gmail.com

THEORY OF PROBABILITY AND COMBINATORICS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Desislava Georgieva

The disadvantages related to the study of probability theory and combinatorics in the school mathematics course in Bulgaria and the reasons for the need for methodical development of these topics are determined. Mathematics textbooks have been analysed. Ideas are proposed to overcome existing problems.