МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

APPLICATION OF THE METHOD OF GENERALIZATION FOR CREATING GEOMETRY PROBLEMS*

Dobrinka Boykina
Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

The article presents several applications of the generalization method in the implementation of the activity of creating planimetric problems. While applying the generalization method, the following methods are used: a) removing a given restriction or replacing it with a more general restriction; b) replacing a given constant with a variable; c) combining ways a) and b).
Keywords: problem, generalization, creating problems.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА ОБОБЩЕНИЕ ЗА СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

Добринка Бойкина
Факултет по математика и информатика,
Пловдивски университет „П. Хилендарски", Пловдив, България
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

В статията се представят няколко приложения на метода обобщение при реализиране на дейността съставяне на планиметрични задачи. При неговото прилагане са използвани следните начини: а) премахване на дадено ограничение или заменянето му с по-общо ограничение; б) заменяне на дадена константа с променлива; в) комбиниране на начини а) и б). Разработката е предназначена най-вече за действащите учители по математика и за студентите – бъдещи учители.
Ключови думи: задача, обобщение, съставяне на задачи.

При обучението по математика в училище обикновено се поставя акцент върху усвояването на предвидената в учебната програма теория по изучаваната тема и придобиването на умения за нейното прилагане при решаване на задачи. За да се реализира успешно обучението, е необходимо учениците целенасочено да овладеят не само изучаваната теория, но и съответни методи за решаване на математически

* https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.126-134
2020 Mathematics Subject Classification: 97D40.

задачи, както и да умеят да извършват методическа разработка на тези задачи. Тя по същество се състои в реализация на четириетапната схема за решаване на задачи, предложена от Д. Пойа [3]. За постигането на тази цел е необходимо действащите учители, а също и студентите, подготвящи се за учители по математика за средното училище, да владеят както същността на използваните методи, така и техните приложения – при това не само за решаване на различни видове задачи, но и за съставяне на такива задачи.

Цитираната схема на Д. Пойа е прилагана и усъвършенствана от редица методици у нас и в чужбина. Така например тя е обстойно обогатена в статията [1], където е разработен съвременен вариант на технологичен модел на дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ), който има голямо практическо приложение. Този модел на ДРМЗ е приложен многократно в монографията [2] при решаването на множество задачи, които имат различни структури или са от различни области на математиката, но там не е разгледан въпросът за съставяне на нови задачи. За да бъде реализиран напълно последният етап „Поглед назад“ от цитираната схема на Д. Пойа и от упоменатия модел на ДРМЗ, трябва в него да се включи и дейността съставяне на задачи. За това обаче е необходимо първо учителите и студентите, които се подготвят за учители по математика, да усвоят нужните знания и умения за съставяне на задачи.

Настоящата статия има за **цел** да бъдат подпомогнати настоящите и бъдещите учители чрез представяне на конкретни примери за приложение на методите обобщение и конкретизация за съставяне на задачи по планиметрия.

Обобщението е метод, който може да се използва за ефективно съставяне на задачи. За целта се извършва анализ на формулировката на конкретната задача от училищния курс по математика (УКМ), която за определеност ще наричаме базова. Обикновено в условието на всяка задача се задават някакви ограничения за обектите в нея или се съдържат константи.

В такива случаи обобщение може да се получи по следните начини:

а) чрез премахване на дадено ограничение или чрез заменянето му с по-общо ограничение;

б) чрез заменяне на дадена константа с променлива;

в) чрез комбинация на а) и б).

Ще илюстрираме казаното с примери.

Задача 1 (базова). Даден е равностранен $\triangle ABC$, на който радиусът на описаната окръжност има дължина 7 cm. Да се намери лицето S на $\triangle ABC$.

Нека да анализираме задачата. Тъй като даденият $\triangle ABC$ е равностранен, той се определя еднозначно с един метричен[1] елемент. В случая това е даденият радиус. В условието на базовата задача са поставени две ограничения за фигурата: $\triangle ABC$ е равностранен и радиусът на описаната му окръжност е 7 cm.

Едно обобщение може да се направи, като се замени конкретната стойност за радиуса на описаната окръжност с константа-параметър. Така се получава:

Задача 1.1. Даден е равностранен $\triangle ABC$, на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R лицето S на $\triangle ABC$.

[1] Метричен елемент на една фигура е число, изразяващо дължина на отсечка, лице на фигура или обем на тяло.

Решението на формулираната задача (както и на базовата) е тривиално за учениците, понеже те са учили формулите $S = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ и $b = R\sqrt{3}$.

Друго обобщение може да се получи чрез промяна вида на триъгълника, т.е. като се премахне ограничението правилен (равностранен) триъгълник. Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен, а той се определя еднозначно чрез два елемента, от които поне единият трябва да е метричен, то би могло да се съставят различни задачи в зависимост от това какви елементи ще бъдат заложени като дадени в условието на задачите. Така например могат да бъдат дадени: бедро и радиус на описаната окръжност; ъгъл между бедрата и радиус на описаната окръжност; основа и радиус на описаната окръжност; бедро и ъгъл (без значение кой ъгъл); основа и ъгъл; основа и бедро; и т.н. Ето и формулировките на съответните задачи.

Задача 1.2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез b и R лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.3. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Ако $\sphericalangle ACB = \gamma$, да се изрази чрез R и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.4. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с основа $AB = c$, на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R и c лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.5. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$), в който $\sphericalangle ACB = \gamma$. Да се изрази чрез b и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.6. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с основа $AB = c$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Да се изрази чрез c и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.7. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$) с основа $AB = c$. Да се изрази чрез b и c лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.8. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Ако $\sphericalangle ABC = \alpha$, да се изрази чрез R и α лицето S на $\triangle ABC$.

Разбира се, нови задачи могат да се съставят и като се промени търсеното в задачата. Но това тук не е цел на статията. Читателят може самостоятелно да формулира такива задачи по аналогия с горните. А тук ще представим други обобщения, като премахнем ограничението триъгълникът да е равностранен или равнобедрен. Тъй като произволният триъгълник се определя до еднаквост с три елемента, от които поне един трябва да е метричен, то, ако в условията на новите задачи бъде зададен радиусът R на описаната около триъгълника окръжност, могат да бъдат съставени много задачи за изразяване лицето на произволен триъгълник чрез радиуса R и коя да е друга двойка негови елементи (метрични или неметрични, основни или неосновни), като обаче се спазва изискването: *елементите във всяка избрана тройка не бива да са зависими помежду си.* В качеството на контра пример на това изискване ще отбележим, че трите елемента: страна, ъгълът срещу нея и радиусът R на описаната около триъгълника окръжност са зависими елементи, защото за тях важи равенството $c = 2R\sin\gamma$. Тук, за илюстрация, ще представим само една задача, като приемем за дадени елементи например едната му страна, един от прилежащите ѝ ъгли и радиуса R на описаната около триъгълника окръжност. Така се достига до следната задача.

Задача 1.9. Даден е произволен $\triangle ABC$, за който $AB = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R, c и β лицето S на $\triangle ABC$.

Разбира се, и тук читателят може да формулира още задачи за произволен триъгълник, като варира дадените или търсените елементи, съобразявайки се с горната забележка за независимост на дадените елементи.

Излизайки от базовата задача **1**, чрез замяна вида на дадената фигура, с метода обобщение може да се формулира и задача за правилен многоъгълник с n страни.

Задача 1.10. Даден е правилен n-ъгълник $A_1A_2\ldots A_n$, вписан в окръжност k с радиус R. Да се изрази чрез R лицето му S.

Поради ограничения в обема на статията, тук няма да представяме решенията на съставените по-горе задачи, получени от базовата чрез метода обобщение, а и това не е цел на разработката. Ще отбележим само някои идеи, които читателят (учител, студент, ученик) би могъл да използва за подробно разписване на техните решения. При всяка от тези задачи могат да се прилагат различни знания за откриване на съответно решение. Това зависи от даденото в нейното условие. Така например при задача 1.2. чрез допълнително построяване на симетралите на основата и едното бедро се получават подобни триъгълници, от които се намира връзка между височината на триъгълника и дадените елементи b и R, а от нея и теоремата на Питагор се изразява чрез тях и основата AB. Търсеният резултат е $S = \dfrac{b^3}{4R}\sqrt{4R^2 - b^2}$. При задача 1.3., прилагайки синусовата теорема, чрез R и γ се изразява основата AB, а от нея се намира и височината към основата. За търсеното лице се получава $S = 4R^2.\sin\gamma.\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. По аналогичен начин, използвайки синусовата теорема и формули по тригонометрия (основната и за понижаване на степента) при задача 1.4., се изразяват чрез R и c функциите $\sin\gamma$ и $\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Тогава нейният отговор е $S = \dfrac{c}{2}\left(2R + \sqrt{4R^2 - c^2}\right)$. При задачи 1.5. и 1.7. директно се прилагат познати формули за лице на триъгълник. Задача 1.6. има пряка връзка със задача 1.3. поради формулата $c = 2R.\sin\gamma$. Отговорът на задача 1.8. е $S = 2R^2.\sin 2\alpha.\sin^2\alpha$. Към задача 1.5. се свежда решаването на задача 1.10. Нейният отговор е $S = \dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

При задача 1.9., отнасяща се за произволен триъгълник, чрез дадените елементи R, c и β посредством синусова теорема се изразява страната AC, а с косинусова теорема, приложена за AC, се съставя квадратно уравнение за страната BC, дискриминантата на което е $D = \sin^2\beta\left(4R^2 - c^2\right)$. Ясно е, че $D \geq 0$, тъй като във всеки триъгълник страната c не може да е по-голяма от диаметъра на описаната окръжност. В частния случай при $c = 2R$ триъгълникът е правоъгълен с хипотенуза $AB = c$ и лицето му е $S = 4R^2.\sin 2\beta$. При $0 < c < 2R$ корените на уравнението са $a_{1,2} = c.\cos\beta \pm \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}$. За да бъде удовлетворено изискването за пълнота на решението, тук се налага провеждане на изследване дали и кога тези корени могат да представят дължината на страната BC. За целта е целесъобразно да се изследват различни случаи в зависимост от стойностите, които може да приема ъгъл β. Така, ако $90^\circ \leq \beta < 180^\circ$, то $a_2 < 0$, а за да бъде положителен другият корен $a_1 = c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}$, трябва да бъде изпълнено неравенството $\operatorname{cotg}\beta > -\dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{c}$. Тогава лицето е $S = \dfrac{c}{2}\left(c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$.

В частния случай, когато $\beta = 90^\circ$, триъгълникът е правоъгълен, но с хипотенуза AC и $S = \dfrac{c}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}$. Ако $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$, то очевидно $a_1 > 0$ и тогава търсеният отговор е $S = \dfrac{c}{2}\left(c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$. Но в този случай е необходимо да се изследва още дали и кога $a_2 > 0$, което може да доведе до втори отговор на задачата. Това изисква да се разгледа неравенството $c.\cos\beta - \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2} > 0$. То ще бъде изпълнено при $\operatorname{cotg}\beta > \dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{c}$. В този случай решението е $S = \dfrac{c}{2}\left(c.\cos\beta - \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$.

Както се вижда, някои от съставените задачи не са сложни и за тяхното решаване се използват известни, познати на учениците знания, а решаването на други изисква прилагане на повече теоретични знания и проява на досетливост. Този факт показва, че дейността съставяне на задачи може да бъде използвана от учителя и с цел реализиране на диференцирано обучение по математика съобразно индивидуалните особености на своите ученици. Така например, според нас, задача 1.9. е целесъобразно да бъде разглеждана в извънкласни форми на обучение по математика.

Докато базовата задача 1. и съставените от нея задачи имат структурата: те са определени до „еднаквост“ с дадените си елементи, то следващата базова задача, както и тези, които ще бъдат съставени, имат друга структура – фигурите в тях са определени до релацията „подобност“.

Задача 2 (базова). Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = 1 : 2$, $AN : AD = 1 : 2$ и $AP : AC = 1 : 2$. Да се намери отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

От тази базова задача едно обобщение може да се извърши, като се замени константата $\dfrac{1}{2}$ с параметър, например p. Така се получава следващата задача.

Задача 2.1. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0; 1)$. Да се изрази чрез параметъра p отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

В тази задача точките M, N и P делят посочените отсечки в едно и също отношение. Ако обаче тези точки делят съответните отсечки в различни отношения, т.е. $\dfrac{AM}{AB} = p$, $\dfrac{AN}{AD} = q$, $\dfrac{AP}{AC} = r$, то се получава ново обобщение, а именно:

Задача 2.2. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметрите p, q и r.

Като се има предвид, че квадратът е видово понятие както спрямо ромба, така и спрямо правоъгълника, т.е. и ромбът, и правоъгълникът са родови понятия за квадрата, то чрез метода обобщение могат да бъдат формулирани нови задачи и за ромб, и за правоъгълник. Така, ако се премахне ограничението ъгълът между две съседни страни да е 90°, т.е. да се разгледа фигурата ромб, то последните две задачи (2.1. и 2.2.) могат да бъдат обобщени по следния начин.

Задача 2.3. Даден е ромб $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0; 1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметъра p.

Задача 2.4. Даден е ромб $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметрите p, q и r.

Ако се премахне ограничението съседните страни да са равни, но се запази условието ъглите на $ABCD$ да са прави, се получава фигурата правоъгълник. Тогава чрез метода обобщение от същите задачи (2.1. и 2.2.) могат да се съставят нови задачи и за правоъгълник. Техните формулировки са следните.

Задача 2.5. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0; 1)$. Да се изрази чрез параметъра p отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

Задача 2.6. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Да се изрази чрез параметрите p, q и r отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

Понеже и ромбът, и правоъгълникът са видови понятия спрямо успоредника, то задачите за ромба (2.3. и 2.4.), както и задачите за правоъгълника (2.5. и 2.6.) също могат да бъдат обобщени, като тези фигури се заменят с фигурата успоредник, отчитайки факта, че в общия случай успоредникът се определя с три елемента, от които поне един трябва да е метричен. Така се стига до формулировката на следните нови задачи.

Задача 2.7. Даден е успоредник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0; 1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметъра p.

Задача 2.8. Даден е успоредник $ABCD$, на който $\sphericalangle BAD = \phi \neq 90^\circ$, имащ страни $AB = a$ и $AD = b$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Да се изрази чрез параметрите p, q, r и елементите a, b и ϕ отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

По-нататъшно обобщение може да се направи, ако вместо успоредник се разгледа изпъкнал четириъгълник, за който е изпълнено условието в следващата задача.

Задача 2.9. Дадени са 4 точки A, B, C и D такива, че B и D са от различни полуравнини относно правата AC и разстоянията от B до AC и от D до AC са равни. Върху отсечките AB, AD и AC са избрани точки M, N и P такива, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Ако $\sphericalangle BAC = \alpha$, да се изрази чрез параметрите p, q, r и α отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

При тази серия няма да представяме решенията на новосъставените задачи. Това може да остане за самостоятелна работа на читателя (учител или студент, подготвящ се за учител по математика, или дори ученик). Ще отбележим обаче, че един поглед назад върху задачите, съставени от изходната задача 2, показва, че между тези десет задачи има определена връзка, която е двупосочна. От една страна, тръгвайки от базовата задача, чрез метода обобщение по вида на разглежданата фигура, и в зависимост от това дали точките M, N и P делят въпросните отсечки в едно и също отношение или ги делят в различни отношения, се достига до всяка следваща двойка задачи, като последната задача 2.9. се явява обобщение на всички предходни обобщения. При това резултатите, които се получават при тяхното решаване, показват, че отговорът на задачи 2.1., 2.3., 2.5. и 2.7. е еднакъв – търсеното отношение е равно на p^2. Един и същ резултат се получава и при решаването на задачи 2.2., 2.4. и 2.6., а именно търсеното отношение е $\dfrac{r}{2}(p+q)$. От друга страна, съществува връзка и в обратна посока. Така, задача 2.1. може да се разглежда като получена от задача 2.3. или от задача 2.5. чрез специализация, като съответно фигурите ромб или правоъгълник се заменят с фигурата квадрат. Аналогично, задачи 2.3. и 2.5. могат да се разглеждат като получени чрез специализация от задача 2.7. Същият извод важи и за задача 2.2. спрямо задачи 2.4. и 2.6., а също и за тези две задачи спрямо задача 2.8.

Задача 3 (базова задача). През произволна точка M, вътрешна за равностранния $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC, BC. Правата p пресича AC и BC съответно в точките B_1 и A_1, правата q пресича AB и BC съответно в точките C_1 и A_2, а правата r пресича AC и AB съответно в точките B_2 и C_2. Да се докаже, че $\dfrac{A_1A_2}{BC}+\dfrac{B_1B_2}{AC}+\dfrac{C_1C_2}{AB}=1$.

В тази задача има 2 ограничения: триъгълникът е равностранен и точка M е вътрешна. Едно обобщение може да се осъществи, ако равностранният триъгълник се замени с произволен триъгълник, т.е. обобщението е по вида на триъгълника.

Задача 3.1. През точка M, вътрешна за произволен $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC, BC. Правата p пресича AC и BC съответно в точките B_1 и A_1, правата q пресича AB и BC съответно в точките C_1 и A_2, а правата r пресича AC и AB съответно в точките B_2 и C_2. Да се докаже, че

$$\frac{A_1A_2}{BC}+\frac{B_1B_2}{AC}+\frac{C_1C_2}{AB}=1.$$

Ще извършим обобщение по мястото на точка M.

Задача 3.2. През точка M, която не е външна за $\triangle ABC$, са построени прави q и r, успоредни съответно на страните AC и BC. Правата q пресича BC в точка A_1, а правата r пресича AC в точка B_1. Да се докаже, че: $\dfrac{A_1B}{BC}+\dfrac{AB_1}{AC}=1$.

Задача 3.3. През точка M, която е външна за $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC и BC. Правата p пресича правите AC и BC съответно в точки B_1 и A_1, правата q пресича правите AB и BC съответно в точки C_1 и A_2, а правата r пресича правите AC и AB в точки B_2 и C_2. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{A_1A_2}{BC}+\dfrac{B_1B_2}{AC}-\dfrac{C_1C_2}{AB}=1$, ако M е разположена в $\sphericalangle ACB$

б) $\dfrac{A_1A_2}{BC} - \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB} = 1$, ако M е разположена в $\sphericalangle ABC$

в) $-\dfrac{A_1A_2}{BC} + \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB} = 1$, ако M е разположена в $\sphericalangle CAB$

Както се вижда от по-горе разгледаните примери, методът обобщение може да се прилага за формулиране на нови, по-общи задачи, излизайки от дадена задача, която тук условно е наречена базова. В учебната практика, отчитайки голямата абстрактност на дадена обща задача и с цел повишаване на достъпността, понякога се налага да се съставят нови задачи чрез методите специализация или конкретизация. Конкретизация е налице например, ако се направи преход от задача 1.1. към задача 1. или от задача 2.1. към задача 2., тъй като въпросният параметър (R или p) се заменя с конкретно число. Затова в такива случаи специализацията и конкретизацията се разглеждат като процеси, обратни на обобщението. Ако например в качеството на изходна е зададена последната задача (Задача 1.10.) от първата серия по-горе, а именно: „Даден е правилен n-ъгълник $A_1A_2 \ldots A_n$ вписан в окръжност k с радиус R. Да се изрази чрез R лицето му S.“, то чрез метода специализация могат да се формулират съответни задачи за правилни триъгълници, четириъгълници, петоъгълници, шестоъгълници.

В някои случаи възниква необходимост от съставяне на други задачи, понеже на субекта (ученика, студента, учителя) не е известен метод за решаване на дадената обща задача. В такива случаи много полезно се оказва разглеждането на конкретни частни ситуации, т.е. формулиране на нови задачи посредством метода конкретизация. Тази идея е реализирана например в задача 10.22 в монографията [2, с. 232 – 236]. Затова тук няма да посочваме примери, а само ще отбележим, че там в процеса на търсене на решение на общата задача се наложи разглеждане (формулиране) на задачата в няколко частни случая, от които се изгради идея за стойността на търсения резултат и за намиране на решение в общия случай.

В заключение ще отбележим, че прилагането на различни методи за съставяне на задачи (не само използваните в тази статия, а и други, които ще бъдат обект на разглеждане в други публикации) обогатява възможностите за по-задълбочено усвояване на системите задачи в обучението по математика. Освен това овладяването на дейността съставяне на задачи е особено полезно за учителя по математика, защото облекчава съществено работата му при извършване на подбор на задачи за класна или контролна работа, а също при проверяването на решенията им. За целта той може да постъпи по следния начин. Първо, формулира (съставя) задачата в най-общ вид, решава я и получава общ отговор. Второ, чрез методите конкретизация или специализация формулира от общата задача конкретни задачи, които да са предназначени за различните ученици или групи ученици (съобразно техните индивидуални възможности), като дава на параметрите различни конкретни стойности. Трето, от отговора на общата задача лесно намира отговорите на всички конкретни задачи, които е формулирал.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Милушев, Д. Бойкина. О методике решения задач школьного курса математики. *Вісник Черкаського університету, Серія „Педагогічні науки“*, № 8 (261) (2013), 95 –

107, ISSN 2076-586X. [V. Milushev, D. Boykina. O metodike resheniya zadach shkol'nogo kursa matematiki Visnik Cherkas'kogo universitetu, Seriya "Pedagogichni nauki", № 8 (261), (2013), 95–107] (in Russian).

[2] Д. Милушева-Бойкина. Прочети, разбери и изгради идея. Монография, Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски", 2021. 289 с. ISBN 978-619-202-675-2 [D. Milusheva-Boykina. Procheti, razberi i izgradi ideya. Monografiya, Plovdiv: UI "Paisiy Hilendarski", 2021. 289 pp] (in Bulgarian).

[3] Д. Пойа. Как да се решава задача. София, „Народна просвета", 1970, 152 с. [D. Polya. Kak da se reshava zadacha. Sofiya, "Narodna prosveta", 1970, 152 pp] (in Bulgarian).