МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

THE HEURISTIC "DIVIDING INTO SUBPROBLEMS" IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS IN 7-th GRADE*

Tsvetelina Zhelyazkova[1], Dobrinka Boykina[2]
Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
e-mails: [1]tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com, [2]boikina@uni-plovdiv.bg

The article is devoted to the heuristic activity in math problem solving education. A brief overview of publications related to the using of heuristics in solving problems is included. A series of geometric math problems illustrating the application of the heuristics "dividing into subproblems" and discovering suitable additional constructions in 7-th grade is proposed.
Keywords: heuristics, geometric problems, dividing into subproblems.

ОТНОСНО ЕВРИСТИКАТА „ОТДЕЛЯНЕ НА ПОДЗАДАЧИ“ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ В 7. КЛАС

Цветелина Желязкова[1], Добринка Бойкина[2]
Факултет по математика и информатика,
Пловдивски университет „П. Хилендарски“, Пловдив, България
e-mails: [1]tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com, [2]boikina@uni-plovdiv.bg

Настоящата статия е посветена на евристичната дейност при обучението в решаване на задачи. Направен е кратък обзор на публикации, свързани с използването на евристики при решаването на математически задачи. Предложена е серия от геометрични задачи, предназначени за 7. клас, с които се илюстрира приложението на евристиките „отделяне на подзадачи“ и откриване на подходящи допълнителни построения.
Ключови думи: евристика, геометрични задачи, отделяне на подзадачи.

Въведение. Решаването на немалка част от математическите задачи може да се сведе до решаване на техните задачи-компоненти, до които се достига в резултат на провеждане на евристична беседа и прилагане на евристични прийоми – „особени мисловни прийоми, които се формират в хода на решаване на едни задачи и, в по-малка или в по-голяма степен, съзнателно се пренасят при търсене решения и на

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.141-148
2020 Mathematics Subject Classification: 97D50.

други задачи.“ [6, с. 63]. Е. Скафа и В. Милушев разглеждат базови евристики при решаване на задачи като: „прийоми за преобразуване на изискванията на задачата, отделяне на следствия, съставяне на спомагателни (промеждутъчни) задачи и т.н.“ [6, с. 91]. В този аспект базовата евристика „отделяне на подзадачи“ има съществена роля в процеса на търсене и откриване решения както на алгебрични, така и на геометрични задачи.

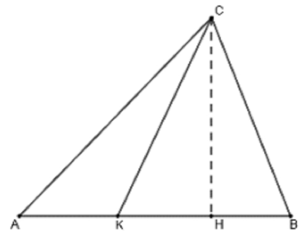
Целта на настоящата статия е да се представят различни приложения на евристиките „отделяне на подзадачи“ и откриване на подходящи допълнителни построения при решаване на геометрични задачи в 7. клас.

Въпросът за използване на евристики при търсене на решения на задачи се разглежда от редица автори и изследователи. Така например, Ив. Тонов в монографията [11, с. 160–173] разглежда стратегия за използването на ***междинна стъпка*** при доказване на неравенства. З. Лалчев и И. Вутова в статията [5] именуват помощните елементи, които свързват условието и заключението на дадена задача, с термина „***свързващи елементи***“ и представят идея за търсене на решения на конкретни геометрични задачи. Така обособяването и решаването на получените задачи довежда до решението на дадената. Д. Пойа обръща внимание на ролята на ***помощните (спомагателни) задачи***, като отбелязва, че „Част от решението на помощната задача (или дори цялото) може да стане част от решението на първоначалната задача“ [9, с. 236]; „помощната задача може да дава *методологична помощ*; тя може да подскаже метода на решението, скица на решението или насоката, в която трябва да се започне работа и т.н.“ [9, с. 236]. А освен това помощната задача може да има и „стимулиращо влияние“ [9, с. 236]. Авторът посочва още, че „С отделяне внимание върху помощни задачи, с работа върху тях и с придобития при това опит ние имаме добра възможност да вземаме решения в правилна насока“ [9, с. 237]. Също така „Понякога може да се захванем с една помощна задача само за *практика*“ [9, с. 237].

Примерни задачи. Откриването на задачи-компоненти в процеса на търсене на решения може да бъде подготвено чрез включването им (или на сходни такива) в системи от задачи, предхождащи разглежданата. В следващите редове ще представим някои примери, като акцентът ще бъде поставен върху обособяването на подзадачи на разглежданата. Изборът на конкретните задачи е мотивиран от идеята на авторите за имплементиране на добре познатите задачи за сравняване на лица на равнинни фигури, разглеждани в часовете за избираема подготовка в 6. клас (приложение на пропорциите при решаване на геометрични задачи), при решаване на тривиални примери в задължителните учебни часове в 7. клас. Основни цели при решаването на предложените задачи са: (1) осъществяване пренос на знания, използвайки по-рано изучените основни задачи (виж ОЗ1 и ОЗ2 по-долу); (2) повишаване на степента на сложност на често срещаните задачи от седмокласния материал чрез прибавяне на допълнителна компонента, а именно използване лица на триъгълници. Във връзка с посочените по-горе цели се използват като базови задачи примерни такива в учебници и сборници по математика за 7. клас, които се изменят чрез добавяне на подзадача, свързана с лица на триъгълници. Поради голямото разнообразие на математически задачи в училищния курс по математика, допускаме възможността някои от предложените по-долу примери (или подобни на тях) да са включени и в учебни помагала по съответния предмет за седмокласници.

В решенията на задачите в настоящата разработка се включват следните основни задачи, свързани с лица на фигури:

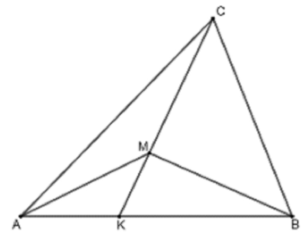
ОЗ1: *Ако два триъгълника имат по една равна височина, то лицата им се отнасят както дължините на страните, към които са построени равните височини.* [10, с. 7]



Фиг. 1

В част от предложените примери се разглеждат случаи, при които два триъгълника имат общ връх, а основите им лежат на една права (фиг. 1).Тогава е в сила пропорцията $\dfrac{S_{AKC}}{S_{BKC}} = \dfrac{AK}{BK}$.

ОЗ2: *Ако точка K е произволна точка от страната на триъгълник ABC, а точка M е произволна точка от отсечката CK* (фиг. 2), *то* $\dfrac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = \dfrac{S_{AKM}}{S_{BKM}} = \dfrac{AK}{BK}$.



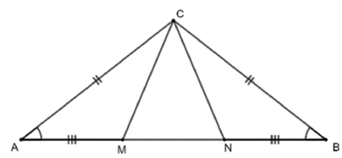
Фиг. 2

ОЗ2 се явява обобщение на [2, с. 150].

Преди да се приложат (използват като помощни), посочените задачи могат да се разгледат като част от система задачи за лица на фигури. В предложената поредица от конкретни примери ще демонстрираме използването на базовата евристика „отделяне на подзадачи“ при решаването на задачи, чиито компоненти се явяват ОЗ1 или ОЗ2, както и се прилагат знания по геометрия от задължителните учебни часове в 7. клас. С оглед на ограничения обем, няма да се спираме на подробни обяснения в решенията.

Първите два примера използват задача, подходяща за задължителните часове (Задача A):

Задача A. [4, с.18] Симетралите на бедрата AC и BC на равнобедрен $\triangle ABC$ пресичат основата AB съответно в точки M и N (M е между A и N) такива, че $AM = MN = NB$. Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.



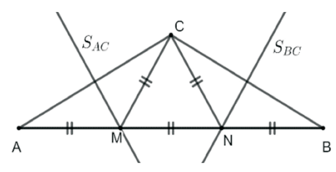
Фиг. 3

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Ако точките M и N са от страната AB (M е между A и N; N е между M и B) такива, че $S_{ANC} = S_{BMC}$ (фиг. 3), да се докаже, че $\triangle MNC$ е равнобедрен.

В решението последователно се доказва, че: (1) $AN = BM \Leftrightarrow AM = BN$, като се използва ОЗ1; (2) $\triangle AMC \cong \triangle BNC$ по първи признак; (3) $\triangle MNC$ е равнобедрен.

След решаване на задачата, в етапа „Поглед назад“ може да се коментира при какви условия $\triangle MNC$ е равностранен. Като естествено продължение на дадената задача се явява следната.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Симетралата на AC пресича AB в точка M, а симетралата на BC пресича AB в точка N, като точка M е между A и N, а точка N е между M и B (фиг. 4). Ако е известно, че $S_{AMC} = S_{MNC} = S_{NBC}$, да се намери големината на $\sphericalangle ACB$.

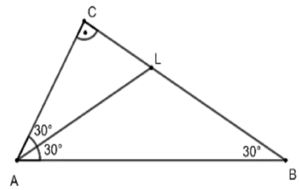


Фиг. 4

Решението на тази задача включва решаване на следните задачи-компоненти:

(1) доказателство, че $AM = MN = NB$, което се доказва с помощта на ОЗ1; (2) $\triangle MNC$ е равностранен; (3) намиране големините на $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$.

Задача 3. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако $\sphericalangle A = 60^\circ$, AL ($L \in BC$) е ъглополовяща и $S_{ABL} = 20$ cm^2 (фиг. 5), да се намери S_{ABC}.



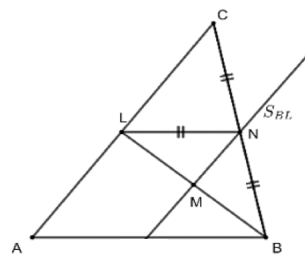
Фиг. 5

В решението на задачата включваме следните подзадачи: (1) $BL : CL = 2 : 1$; (2) $\dfrac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \dfrac{BL}{CL} = \dfrac{2}{1}$ (ОЗ1); (3) $S_{ABC} = S_{ABL} + S_{ALC} = 30$ cm^2.

Твърдение (1) е добре познато на седмокласниците (виж [7, с. 178 – 179]). Все пак неговото доказателство включва някои подзадачи:

В $\triangle ALC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) се установява, че $CL = \dfrac{1}{2}AL$ ($AL = 2CL$), като се прилага теоремата: „*Ако в правоъгълен триъгълник един от ъглите е* 30°, *то катетът срещу този ъгъл е равен на половината от хипотенузата.*" [7, с. 176]; Доказва се, че $\triangle ABL$ е равнобедрен (ъглите при основата AB са равни) и съответно $BL{=}AL{=}2CL$.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, в който BL ($L \in AC$) е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$. Симетралата на BL пресича BL и BC съответно в точки M и N (фиг. 6). Ако $S_{LNC} = 2S_{MBN}$, да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

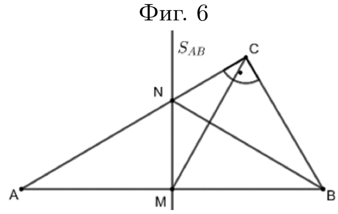


Фиг. 6

Задачите-компоненти включват доказателства на следните твърдения: (1) $S_{LNM} = S_{MBN}$ (NM е медиана в LBN); (2) точка N е среда на BC (следва от $S_{LNC} = 2S_{MBN} = S_{LNB}$); (3) $\sphericalangle BLC = 90^\circ$;

(4) $\triangle ABC$ е равнобедрен (BL – ъглополовяща и височина).

Задача 5. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) $AC > BC$, симетралата на хипотенузата пресича AB в точка M и AC в точка N (фиг. 7). Ако $S_{BNC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$, да се намери $\sphericalangle MCB$.



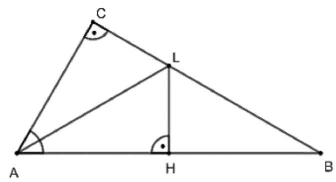
Фиг. 7

Подзадачите са: (1) доказва се, че $CN = \dfrac{1}{2}AN$ (използвайки като помощна ОЗ1), откъдето следва, че $CN = \dfrac{1}{2}BN$ (тъй като $AN = BN$); (2) намират се ъглите на $\triangle BNC$ и $\triangle ABC$ (прилагайки теоремата за правоъгълен триъгълник, в който катет е равен на половината от хипотенузата); (3) установява се, че $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MBC = 60^\circ$ (използвайки теоремата за медиана в правоъгълен триъгълник).

Задачите с допълнителни построения често се оказват нелеко предизвикателство за много от седмокласниците. П. Петров изгражда оригинална евристична схема за търсене и откриване на пътя за решаване на геометрични задачи, която прилага многократно при множество конкретни задачи от училищния курс в своята монография [8]. С оглед обучаване на учещите, той при всяка задача поставя акцент на самото **откриване** на съответния път, като за целта мотивира всяко допълнително построение или предстояща стъпка. В книгата „Допълнителните построения – магията на геометрията“ Н. Иванова разглежда допълнителните построения по степен на определеност [4, с. 8 – 11] и посочва, че това „има за цел да подскаже критерии за съвместимостта на тяхната реализация с възможностите на определена възрастова група, за тяхната посилност на даден етап от обучението в средното училище. То съдейства за аргументирането на последователността и етапността при формиране на умения за прилагане на метода на допълнителните построения и ориентира към по-конкретни идеи, свързани със систематизация на допълнителните построения и с възможности за алгоритмизация на някои видове допълнителни построения“ [4, с. 11 – 12]. Също така в статията [3] С. Гроздев и Т. Чехларова разглеждат действието ***„добавяне“*** (и негов частен случай – допълнително построение в геометрични задачи) и поставят акцент на идеята за автоматизирането и превръщането му в операция.

В настоящата статия няма да се спираме подробно върху използването на допълнителните построения при обучението в решаване на геометрични задачи, но в следващото изложение ще разгледаме няколко конкретни примера, при които се прилага евристиката допълнително построение, в резултат на което се конструират подзадачи за дадената.

Задача 6. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако AL е ъглополовяща ($L \in BC$) и $S_{ABL} : S_{ALC} = 2 : 1$ (фиг. 8), намерете големината на $\sphericalangle ABC$.



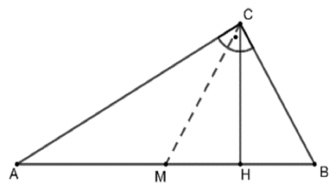
Фиг. 8

При решението тук се използва ОЗ1 и се установява, че $BL : CL = 2 : 1$, т.е. $BL = 2CL$. (*)

След преформулиране на задачата тя може да се окаже позната на учениците (виж [4, с.34]). Ако до този момент тя не е решавана, полученото равенство (*) дава идея да се построи $LH \perp AB$, $H \in AB$. Това допълнително построение определя следващите подзадачи.

Учениците от 7. клас със сигурност ще забележат, че в правоъгълния триъгълник LHB катетът LH е равен на половината от хипотенузата и тогава ще намерят големината на $\sphericalangle HBL = 30^\circ$, т.е. $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Допълнителното построение се явява „свързващият елемент“, благодарение на който се реализира решението.

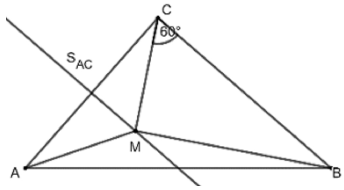
Задача 7. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако CH е височина към хипотенузата и $S_{HCB} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$ (фиг. 9), да се намери $\sphericalangle BAC$.



Фиг. 9

При решаване на задачата отново се прилага ОЗ1, след което се установява, че $HB = \dfrac{1}{4}AB$ или $AH = 3HB$. Така преформулираната задача в повечето случаи се оказва позната за учениците (виж [4, с.34]), тъй като доказателството на обратното твърдение е често срещано в учебниците за 7. клас (виж [7, с.178]). Получената тук връзка $HB = \dfrac{1}{4}AB$ между дължините на тези отсечки насочва към идеята за „работещо“ допълнително построение. Решаването на задачата включва построяване на медианата CM към хипотенузата ($M \in AB$), при което се обособява $\triangle MBC$, за който се доказва, че е равностранен. След това се намира и големината на $\sphericalangle BAC = 30°$.

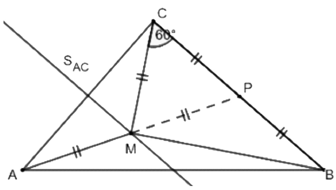
Задача 8. Даден е $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$). Върху симетралата на катета AC е взета точка M такава, че $\sphericalangle BCM = 60°$ (фиг. 10). Ако $S_{AMC} = S_{AMB}$, докажете, че $\triangle BMC$ е правоъгълен и $BM = AC$.



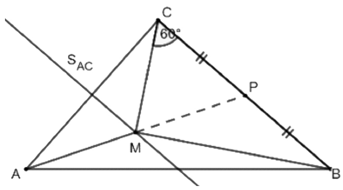
Фиг. 10

Фактът, че $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ са равнолицеви с обща страна AM насочва към идеята за продължаване на AM до пресичането ѝ със страната BC (в точка P), фиг. 11. Досещането за това допълнително построение може да се подготви чрез предварително запознаване на учениците с ОЗ2.

Като подзадачи на дадената задача се обособяват: (1) намирането на ъглите на $\triangle AMC$ (който е равнобедрен поради характеристичното свойство на симетралата на AC); (2) пресмятане на $\sphericalangle CMP$ (като външен ъгъл за $\triangle AMC$ или съседен на $\sphericalangle AMC$); (3) установяване, че $\triangle CMP$ е равностранен (фиг. 12).

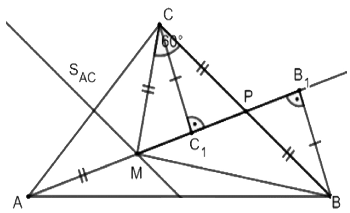


Фиг. 11



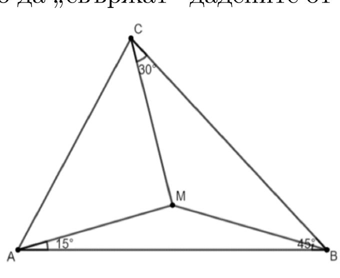
Фиг. 12

Разбира се, учениците могат да разсъждават и така: „Щом $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ са равнолицеви с обща страна AM, то височините им към нея, спуснати от върховете C и B, са равни. Затова, ако се разгледат $\triangle CC_1P$ и $\triangle BB_1P$, където CC_1 и BB_1 са упоменатите височини, то те са еднакви по втори признак. От тяхната еднаквост следва, че $CP = BP$, т.е. MP е медиана в $\triangle CMP$.“ (фиг. 13). Тогава, прилагайки теоремата „*Ако в триъгълник медианата към страна е равна на половината от страната, то ъгълът срещу тази страна е прав.*“ [2, с. 152], учениците лесно доказват, че $\triangle BMC$ е правоъгълен. За доказателството на $BM = AC$ е целесъобразно да се насочат към включване на отсечките в еднакви триъгълници, посредством които да „свържат“ дадените отсечки. След естественото откриване на ъглите на $\triangle BMP$, като последна подзадача на дадената, се доказва еднаквостта на $\triangle AMC$ и $\triangle BPM$ (по първи признак).



Фиг. 13

Полученият равностранен триъгълник се оказва „ключов елемент“ при откриването на решението. В следващата задача се използва същото допълнително построение, което води до обособяване на различни задачи-компоненти.

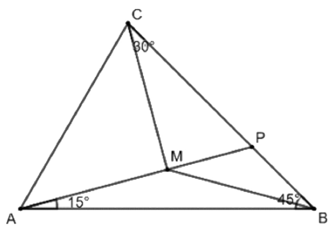


Фиг. 14

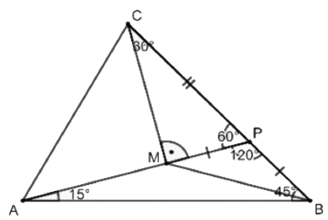
Задача 9. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ (фиг. 14). Точка M е вътрешна за триъгълника такава, че $\sphericalangle MAB = 15^\circ$, $\sphericalangle MCB = 30^\circ$ и $\dfrac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \dfrac{1}{2}$. Да се намерят $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BAC$.

Нека AM пресича BC в точка P (фиг. 15). Като задачи-компоненти на дадената се явява намирането на ъглите на $\triangle MPC$, $\triangle MBP$, $\triangle ABM$, $\triangle AMC$ (фиг. 16). Учениците бързо откриват, че $\sphericalangle APB = 120^\circ$, $\sphericalangle MPC = 60^\circ$, $\sphericalangle CMP = 90^\circ$ и доказват, че $MP = \dfrac{1}{2}CP$ (1).

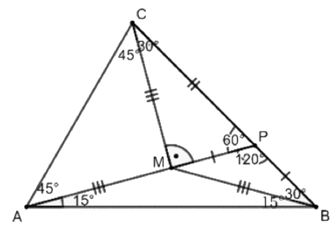
Като се приложи ОЗ2, т.е. $\dfrac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \dfrac{BP}{CP} = \dfrac{1}{2}$ (фиг. 17), се получава $BP = \dfrac{1}{2}CP$ (2). Тогава от равенства (1) и (2) следва, че $MP = BP$, откъдето се установява, че MBP е равнобедрен. Последователно се доказва, че $MB = MC = MA$ и се намират търсените ъгли $\sphericalangle ACB = 75^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.



Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17

След решаване на предходните задачи, анализиране на техните решения и акцентиране на идеята за използване на съответното конкретно допълнително построение, е уместно да се предложат и следните задачи (или техни сродни), използващи същата идея – допълнително построение. Те са предназначени за самостоятелна работа:

Задача 10. [1, с. 137] В триъгълника ABC е избрана точката M по такъв начин, че $\sphericalangle AMC = 120^\circ$, $\sphericalangle BCM = 60^\circ$ и $AM + MC = BC$. Да се докаже, че $BM = AC$.

Задача 11. [1, с. 147] В равнобедрения ABC ъглите при основата са по 40°. В триъгълника е избрана вътрешна точка така, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ACM$.

Чрез осъществяване на пренос на знания от по-рано разглеждани задачи за отношение на лица на триъгълници, в съчетание с приложение на новите знания от 7. клас, учениците естествено се насочват към идеята за търсене на „работещо“ допълнително построение. Така „сложната“, на пръв поглед, за учениците многокомпонентна задача се оказва достъпна и решима, защото решението ѝ е „трасирано“ от познати помощни задачи, които в някои случаи естествено насочват към подходящо допълнително построение. На следващ етап в обучението предлагаме на учениците решаване на задачи, сходни със задачи 10. и 11., като разглеждането на предходните, които по-горе представихме, подпомагат досещането за работещата идея при тяхното решаване.

Заключение. Представената серия от задачи е целесъобразно да се използва в избираемите учебни часове по математика в 7. клас. Учителят би могъл да изменя, допълва и организира своя система от задачи, приложима за конкретната цел на занятието, в съответствие с нивото на владеене на учебния материал и особеностите на обучаваната група. Считаме, че настоящата серия от задачи може да се обогати както по отношение на приложението на различни основни задачи, свързани с лица на фигури от 5 – 6. клас, имплементирани в решенията на задачи, достъпни със седмокласен учебен материал, така и по отношение на други допълнителни построения, които се използват при решаването им.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Величков. Сборник задачи и тестове по математика за 7. клас. Първо издание, София, Регалия 6, 2008. [V. Velichkov. Sbornik zadachi i testove po matematika za 7. klas. First Edition. Sofia: Regalia 6, 2008.] (in Bulgarian).

[2] Т. Витанов, А. Калчева, И. Джонджорова, М. Кьосева, П. Тодорова. Математика за 7. клас. ИК „Анубис“, 2018. [T. Vitanov, A. Kalcheva, I. Djondjorova, M. Kyoseva, P. Todorova. Matematika za 7. klas. IK “Anubis”, 2018] (in Bulgarian), https://sales.anubis-bulvest.com/parents/useBook/409

[3] С. Гроздев, Т. Чехларова. Върху действието „добавяне“ в дейността „решаване на задачи“. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 331 – 340. [S. Grozdev, T. Chehlarova. On the action of addition in the activity of problem solving. *Math. and Education in Math.*, **36** (2007), 331–340] (in Bulgarian).

[4] Н. Иванова. Допълнителните построения – магията на геометрията (Учебно пособие по математика за 7. клас). Пловдив, Коала прес, 2013 [N. Ivanova. Dopylnitelnite postroeniya – magiyata na geometriyata (Uchebno posobie po matematika za 7. klas). Plovdiv, Koala pres, 2013] (in Bulgarian).

[5] З. Лалчев, И. З. Вутова. Свързващ елемент. *Математика и математическо образование*, **32** (2003), 369 – 373. [Z. Lalchev, I. Z. Vutova. Svarzvasht element. *Math. and Education in Math.*, **32** (2003) 369–373] (in Bulgarian).

[6] В. Милушев, Е. Скафа. Конструиране на учебно-познавателната евристична дейност по решаване на математически задачи. Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски“, 2009 [V. Milushev, E. Skafa. Konstruirane na uchebno-poznavatelna deinost po reshavane na matematicheski zadachi. Plovdiv: UI “Paisii Hilendarski”, 2009].

[7] П. Нинкова, М. Лилкова, Т. Стоева, И. Шаркова, Л. Раденкова. Математика за 7. клас. София: „Просвета – София“, 2018 [P. Ninkova, M. Lilkova, T. Stoeva, I. Sharkova, L. Radenkova. Matematika za 7. klas. Sofia: “Prosveta – Sofia”, 2018] (in Bulgarian).

[8] П. Петров. Евристична схема за откриване на решения на планиметрични задачи. Пособие за учителя. – Ст. Загора, 1993. [P. Petrov. Evristichna shema za otkrivane na reshenia na planimetrichni zadachi. Posobie za uchitelya. – St. Zagora, 1993] (in Bulgarian).

[9] Д. Пойа. Математическото откритие. София: Народна просвета, 1968. [G. Polya. Matematicheskoto otkritie. Sofia: Narodna Prosveta, 1968] (in Bulgarian).

[10] П. Рангелова, Ив. Старибратов. 111 задачи за сравняване лица на равнинни фигури. Методическо ръководство по математика за ученици от 5. до 7. клас и техните преподаватели. Пловдив, Коала прес, 2011 [P. Rangelova, Iv. Staribratov. 111 zadachi za sravnyavane litsa na ravninni figuri. Metodichesko rykovodstvo po matematika za uchenitsi ot 5. do 7. klas i tehnite prepodavateli. Plovdiv, Koala pres, 2011] (in Bulgarian).

[11] И. Тонов. Евристиката – наука, изкуство, занаят. Хабилитационен монографичен труд, София: СУ „Св. Климент Охридски“, 2012 [I. Tonov. Evristikata – nauka, izkustvo, zanayat. Habilitatsionen monografichen trud. Sofia: Sofia University “St. Kliment Ohridski”, 2012] (in Bulgarian).