МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

220 YEARS OF CARL GUSTAV JACOBI

Petar Popivanov

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: popivano@math.bas.bg

In 2024 is 220th jubilee of the great German mathematician K. G. Jacobi. In this paper we propose short biographical notes and formulate in 12 points his main achievments in analysis, mechanics, variational calculus, etc.

220 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА КАРЛ ГУСТАВ ЯКОБ ЯКОБИ

Петър Попиванов

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: popivano@math.bas.bg

През 2024 г. отбелязваме 220-ия юбилей на великия немски математика К. Г. Якоби. В настоящата статия предлагаме кратки биографични бележки и формулираме в 12 точки основните му постижения в областта на математическия анализ, механиката, вариационното смятане и др.

Карл Якоби произхожда от богато еврейско семейство, но при раждането му на 10.12.1804 г. родителите са му дали френското име Жак-Симон. Било е времето след Френската революция и в разцвета на военните успехи на Наполеон. Семейството му е живеело в Потсдам в тогавашното кралство Прусия. Бащата е банкер и има трима сина и една дъщеря. Съдбата отрежда на Карл Якоби 46 г. живот и той умира на 18.02.1851 г. в Берлин. Началното си образование получава от вуйчо си и на 12-годишна възраст постъпва в гимназията в Потсдам. През 1817 г., в края на първата година на обучението си, той е преместен в последния клас на училището като резултат от добрата си предварителна подготовка и блестящи способности. Накратко, на 13-годишна възраст Карл Густав удовлетворява стандартите за постъпване в кой да е университет. Съгласно правилата на Берлинския университет, студенти не се приемат, ако не са навършили 16 г., и на младия Якоби се налага да остане ученик в същия клас в Потсдам чак до пролетта на 1821 г. Това не е загубено време, защото той се занимава активно и получава награди за успехите си по гръцки, латински и

история. Запознава се и с книгата на Ойлер „Въведение в математическия анализ“. От това време датира и опитът му да разреши алгебричното уравнение от 5-а степен в радикали. Благодарение на Абел, Руфини и на Галоа, знаем, че това е невъзможно в общия случай, а Галоа създава своята знаменита теория за разрешимост на алгебрични уравнения от n-та степен.

В началото на образованието си в Берлинския университет Якоби е раздвоен в интересите си между филологията, отчасти философията и математиката. Той намира равнището на преподаване по математика в Берлин доста елементарно и затова сам се запознава с някои трудове на Ойлер, Лагранж и Лаплас. Около 1823 г. решава да се посвети изцяло на математиката, загърбвайки другите си интереси. В края на учебната 1823 – 1824 г. полага изпити, които му дават педагогическа правоспособност в училищата. Въпреки предложената му позиция в елитна берлинска гимназия, Карл Густав решава да поеме по пътя на изграждане на университетска кариера. През 1825 г. защитава пред комисия (сега „жури“), оглавявана от Енно Дирксен, дисертация по разлагането на алгебричните дроби на елементарни дроби и получава научната степен „доктор по философия“. Почти веднага следва неговата хабилитация и промяната на вероизповеданието му от израилтянско в християнско (протестантско). Възможно обяснение на тази промяна е преодоляването на евентуалните пречки пред научното му израстване, дължащи се изцяло на етнически причини. Още през учебната 1825 – 1826 г. Якоби чете лекции в Берлинския университет по теория на кривите и повърхнините. Изглежда, че перспективите пред него в този университет не са били особено добри и затова той постъпва през май 1826 г. в университета в Кьонигсберг (сега Калининград в Руската федерация). От 28.12.1827 г. е доцент, а от май 1832 г. е пълен професор в Кьонигсберг. Тук той сътрудничи с Ф. Нойман (1798 – 1895) и астронома проф. Ф. В. Бесел (1784 – 1846).

Преди да формулирам някои от основните постижения на Якоби в математиката, които са обезсмъртили неговото име, ще спомена, че той е поддържал кореспонденция и е получил признание за изследванията си по теория на числата (кубични остатъци) от К. Ф. Гаус (1777 – 1855), създател на теорията на квадратичните и биквадратичните остатъци. Особено внимание заслужават резултатите на Якоби по елиптичните функции, чиято теория той изгражда в много сериозна конкуренция с Н. Х. Абел (1802 – 1829). От големия френски математик и задълбочен изследовател на елиптичните интеграли, но от предишно поколение, А. М. Лежандър (1752 – 1833), са запазени писма до Якоби от 1828 г. и от 1829 г. с най-ласкави оценки за работите на Якоби и Абел по елиптични функции, оприличавайки изследванията им със състезание (борба) между „двама млади еднакво силни атлети“. През май 1831 г. Карл Якоби се жени за Мария Швинк. Около 1842 г. заболява от диабет и страда от хронична преумора. Лекарите го съветват да прекара известно време в Италия, но Якоби има сериозни финансови проблеми. Независимо от завидното бащино наследство, голямата икономическа депресия в Европа и разбира се в Прусия през 40-те години на 19. век води известния математик до финансов банкрут – накратко, губи всичките си пари. П. Л. Дирихле (1805 – 1859), който посещава Кьонигсберг, се обръща към А. фон Хумболдт с молба да издейства финансова подкрепа от крал Фридрих-Вилхелм IV за пребиваването и лечението на Якоби в Италия. Ходатайството е успешно и е получен необходимият грант. Престоят в Италия е ползотворен, но впоследствие, предвид сравнително тежкия климат в Кьонигсберг, Якоби преминава на работа, т.е. се завръща, през м. юни 1844 г. в Берлинския университет. Той чете курс по аналитична механика през учебната 1847 – 1848 г., в който подлага на критика лагранжевата механика (Ж. Л. Лагранж (1736 – 1813)).

Както всички знаем, 1848 г. е година на антифеодалните революции в Европа, има вълнения и в Берлин. Якоби е политически ангажиран и безуспешно е номиниран за парламентарните избори от името на Конституционния (Либералния) клуб. Това настройва срещу него и монархисти, и републиканци. Последиците от политическите изяви на Якоби са негативни. Пруските власти спират добавката към заплатата, позволяваща му да живее в скъпия град Берлин, и се налага семейството му да се премести в малкия град Гота. Въпреки поканата да отиде на работа във Виенския университет, той, а и пруските власти, правят компромис – Якоби остава да чете лекции след 1849 г. в Берлинския университет, но поради финансови причини семейството му остава да живее в Гота. В началото на февруари 1851 г. се заразява от инфлуенца, а след това и от вариола (едра шарка), което води до преждевременната му смърт на 18.02.1851 г.

Още приживе Карл Густав Якоби се радва на голямо и заслужено международно признание. Член е на Берлинската академия на науките (1827), на Парижката академия на науките (1832), на Лондонското кралско дружество (1832), почетен член е на Руската императорска академия на науките (1832). Заедно с Н. Х. Абел е носител на наградата на Парижката академия на науките за постиженията им в теорията на елиптичните функции. Както беше казано по-горе, в няколко точки ще резюмирам някои от неговите най-забележителни резултати.

1. Матрица на Якоби $\mathcal{J} = (a_{ik})$ – квадратна матрица с реални елементи, за която $a_{ik} = 0$ при $|i - k| > 1$. Приети са означенията $a_i = a_{ii}$, $b_i = a_{ii+1}$, $c_i = a_{i+1i}$.

Има редица интересни свойства. Например, всеки минор на $\mathcal{J}$ е произведение на някои главни минори на $\mathcal{J}$ с някои нейни елементи. Ако $b_i c_i > 0$ за $i = 1, \ldots, n-1$, собствените стойности на $\mathcal{J}$ са реални и различни. Има връзка с работите му по вариацонно смятане.

2. Метод на Якоби, предложен през 1834 г., за привеждане на квадратична форма в каноничен вид с помощта на триъгълно преобразуване на неизвестните. Якоби предлага също така метода на простите итерации за решаване на линейната алгебрична система $Ax = b$, където тя предварително се записва във вида $x = Bx + g$.

3. Полиноми на Якоби P_n, въведени от него в „J. Reine und angew. Math.“ (Crelle's Journal) във връзка с решението на хипергеометричното уравнение на Гаус. Общоприета е за тях формулата на Родриг, съгласно която

$$P_n(x;\alpha,\beta) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(1-x^2\right)^n\right],$$
$$\alpha > -1, \beta > -1, x \in [-1,1].$$

Те са ортогонални в интервала $[-1,1]$ с теглова функция $h = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Полиномът $P_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворява линейно ОДУ от II ред с коефициент пред втората производна $\left(1-x^2\right)$. Има добре развита теория на редовете на Фурие по полиномите на Якоби. Трудностите се дължат на факта, че в краищата на интервала 1 (-1) редицата на ортонормираните полиноми на Якоби расте като $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ $\left(n^{\beta+\frac{1}{2}}\right)$. При естествени ограничения върху функцията $f(x)$, нейният ред на Фурие – Якоби е равномерно сходящ в $[-1,1]$. При $\alpha = \beta = 0$ полиномите на Якоби съвпадат с полиномите на Лежандър.

4. Интегралната трансформация на Якоби се задава с формулата

$$\mathcal{J}(F(x)) = f^{(\alpha,\beta)}(n) = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx.$$

При известни условия е налице формула за обръщането на $\mathcal{J}$. При $\alpha = \beta = 0$ $\mathcal{J}$ съвпада с трансформацията на Лежандър. $\mathcal{J}$ се използва при решаването на някои специални класове от израждащи се линейни ОДУ от II ред.

5. Добре известен е от механиката вариационният принцип на Якоби за стационарното действие, който е установен от него за холономни консервативни системи. Намирането на траекториите на движение на холономна консервативна система се свежда до геометричната задача за намиране в Римановo пространство с подходяща метрика dS^2 на екстремалите на някаква вариационна задача. По-точно, функционалът действие има минимум върху траекториите на движението.

6. Символ на Якоби и приложения в алгебрата. Трябва предварително да напомним някои дефиниции и резултати от теория на числата. И така, нека p е нечетно просто число, а m е цяло, взаимно просто с p, т.е. $(m,p) = 1$. Символът на Лежандър $\left(\dfrac{m}{p}\right)$ се дефинира така:

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1, & x^2 \equiv m \pmod{p} \\ -1, & x^2 \not\equiv m \pmod{p} \end{cases}$$

Нека сега $p \neq q$ са нечетни прости числа, т.е. $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ и $\left(\dfrac{q}{p}\right)$ имат смисъл. Гаус доказа знаменития закон за реципрочност на квадратичните остатъци, съгласно който

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Да предположим, че $P > 1$ е нечетно, а цялото число a е взаимно просто с P, т.е. $(a, P) = 1$. Разлагаме $P = p_1 \dots p_r$ на прости множители p_j (канонично разлагане), като някои от тях могат да съвпадат.

Якоби въвежда през 1837 г. символа $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\dots\left(\frac{a}{p_r}\right)$ и установява, че той има свойства, аналогични на символа на Лежандър, като и за него е валиден законът за реципрочност на квадратичните остатъци. Тук P, $Q > 1$ са нечетни, $(P, Q) = 1$.

7. Скобка на Якоби (известна още като скобка на Майер): $[F, Q]$. Диференциален израз, съдържащ в билинейна форма първите производни на $F(x, u, p)$, $G(x, u, p)$, където $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$. Лесно се вижда, че $[F, G] = -[G, F]$ и е валидно следното тъждество на Якоби: $[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0$.

Ако F, G не зависят от u, скобката на Якоби съвпада със скобката на Поасон. И тази дефиниция я има в Crelle.

8. През 1842 г. Якоби въвежда в Crelle ОДУ от I ред, което сега носи неговото име:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Axy + By^2 + ax + by + c}{Ax^2 + Bxy + \alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Горното уравнение е интегруемо в явен вид, защото се свежда до хомогенно ОДУ от I ред.

Има сравнително прост начин за решаване на уравнението на Якоби чрез редуцирането му към 3×3 система от ОДУ с постоянни коефициенти. Тогава решението се записва в параметричен вид.

И така, записваме ОДУ на Якоби във вида

$$(a_2x + b_2y + c_2)\,dx - (a_1x + b_1y + c_1)\,dy + (a_3x + b_3y + c_3)\,(-ydx + xdy) = 0,$$

където $\tilde{l}_j = a_jx + b_jy + c_j$, $j = 1, 2, 3$ са линейни полиноми от първа степен с реални коефициенти. Нарочно не прецизираме изискванията върху тях. Обичайната хомогенна смяна, известна от аналитичната геометрия $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, $x_3 \neq 0$, води до: $dx = \frac{x_3dx_1 - x_1dx_3}{x_3^2}$, $dy = \frac{x_3dx_2 - x_2dx_3}{x_3^2}$; $\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \Rightarrow xdy - ydx = \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_3^2}$.

След заместване в изходното уравнение заключаваме, че:

$$l_2(z)\,(x_3dx_1 - x_1dx_3) - l_1(z)\,(x_3dx_2 - x_2dx_3) + l_3(z)\,(-x_2dx_1 + x_1dx_2) = 0,$$

където линейните форми в $\mathbb{R}^3$ са: $l_j(z) = a_jx_1 + b_jx_2 + c_jx_3$, защото $z = (x_1, x_2, x_3)$, $A_j = (a_j, b_j, c_j)$, т.е. $l_j(z) = \langle A_j, z\rangle$.

Диференциалното уравнение относно x_1, x_2, x_3 се записва в детерминантен вид:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ l_1(z) & l_2(z) & l_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Знаем, че ако разгледаме 3×3 системата ОДУ с постоянни коефициенти в $\mathbb{R}^3$: $\dot{z}(t) = Az$, където $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, а $Z = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, то $\dot{x}_j = l_j(z) = \langle A_j, z \rangle$, $j = 1, 2, 3$ е решение на предишното уравнение. Общото решение на линейната система се дава от $z(t) = e^{At} \cdot C$, $C \in \mathbb{R}^3$, $C = \text{const}$.

Уравнението на Якоби притежава решенията $x = \dfrac{x_1(t)}{x_3(t)}$, $y = \dfrac{x_2(t)}{x_3(t)}$, които са записани в параметричен вид. Ако от първото уравнение изразим в някакъв интервал $t = \varphi(x)$, то $y = \dfrac{x_2(\varphi(x))}{x_3(\varphi(x))}$. Тук $t \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^1$, $x \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^1$ и $\dfrac{d}{dt}\dfrac{x_1(t)}{x_3(t)} \neq 0$ в Δ_1. Разбира се, $x_3(t) \neq 0$ в Δ_1.

Пример: $\tilde{l}_1 = y + 1$, $\tilde{l}_2 = x + 1$, $\tilde{l}_3 = x + y$, т.е. $l_1 = x_2 + x_3$, $l_2 = x_1 + x_3$, $l_3 = x_1 + x_2$. Тогава имаме система ОДУ 3×3:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{array} \right. .$$

Както знаем от курса по ОДУ, общото ѝ решение е:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ x_2 = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ x_3 = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t} \end{array} \right. ,$$

където C_1, C_2, C_3 са произволни константи. Значи в параметричен вид

$$x = \frac{C_1 e^{3t} + C_2}{C_1 e^{3t} - (C_2 + C_3)}, \; y = \frac{C_1 e^{3t} + C_3}{C_1 e^{3t} - (C_2 + C_3)}, \; C_1 e^{3t} \neq C_2 + C_3.$$

От първото уравнение формално намираме $e^{3t} = \dfrac{(C_2 + C_3)x + C_2}{C_1(x - 1)} > 0$. Оттук вземаме e^{3t} и го заместваме във второто уравнение, откъдето следва, че y е дробно-линейна функция на x в някакъв интервал на изменение на x.

9. Добре известна е функционалната детерминанта на Якоби $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ на диференцируемите функции $\varphi_j(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Понякога я наричат Якобиан и модулът ѝ играе важна роля при смяната на променливите в кратните интеграли. Според историци на математиката тази детерминанта се появява за пръв път в статия на Коши през 1815 г. Якоби пише голям мемоар през 1841 г., посветен на Якобиана, и изследва функционалната (не)зависимост на функциите, която води до (не)анулиране на Якобиана.

Ще пристъпя сега към фундаментални резултати на Якоби от теорията на елиптичните функции (1829 г. и след това – отпечатани в Crelle). Тук спадат дефинициите на тета функция, на елиптичните функции на Якоби и приложенията им в механиката. Уравненията на движението на махалото, на пумпала на Ойлер, на симетричния пумпал на Лагранж в гравитационно поле и Кеплеровия проблем са интегруеми в термините на (посредством) якобиевите елиптични функции.

10. Якоби дефинира 4 тета функции $\theta_0, \ldots, \theta_3$, но ще запишем тук формулата само за една от тях, а именно $\theta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau + 2mv)\pi i}$, където τ е параметър и $\operatorname{Im}\tau > 0$ обезпечава сходимостта на реда. Всички θ функции удовлетворяват ЧДУ $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}$.

Означенията на Якоби за елиптичните функции не се използват в наши дни. Те са заменени с по-удобните означения на Гудерман от 1838 г. И така, това са $x = \operatorname{sn} w$, $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} w$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} w$, $0 \le k \le 1$, където $w = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$. Произнасят се синус амплитуда, косинус амплитуда и делта амплитуда. Интегралът в дясната страна носи името елиптичен интеграл от I род в нормална форма на Лежандър. Неговото обръщане (т.е. неговата обратна функция) има вида $x = \operatorname{sn} w$.Това е изходният пункт в теорията на Якоби.

И така, $w = \operatorname{sn}^{-1} x$, $w = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sn} w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$. Якоби дефинира $\operatorname{sn} w$ в комплексна област чрез $\theta_0, \ldots, \theta_3$. Знаменит резултат на Якоби от онова време е следната теорема.

Ако една еднозначна аналитична функция е многопериодична, то тя има най-много 2 периода, чието частно не може да бъде реално число.

Елиптичните функции на Якоби са 2-периодични, имат безбройно много нули и полюси и теорията им е добре развита. Очевидно $\dfrac{dx}{dw} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \Rightarrow \dfrac{d\operatorname{sn} w}{dw} = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$. Тъждествата $\operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w = 1$, $\operatorname{dn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 w = 1$ водят до равенствата $\dfrac{d}{dw}\operatorname{cn} w = -\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{dn} w$, $\dfrac{d}{dw}\operatorname{dn} w = -k^2 \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w$. Очевидно $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{sn} w\right)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 w)(1-k^2\operatorname{sn}^2 w)$, $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{cn} w\right)^2 = (1-\operatorname{cn}^2 w)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 w)$, $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{dn} w\right)^2 = (1-\operatorname{dn}^2 w)(\operatorname{dn}^2 w - k'^2)$, $k'^2 = 1-k^2$. Функцията $\operatorname{cn} w$ в $\mathbb{C}^1$ е с периоди $4K$ и $2iK'$, $K, K' \in \mathbb{R}^1 \backslash 0$.

Якоби дефинира и така наречената Z функция

$$Z(w) = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} \sin \frac{\pi w}{K}}{1 - 2h^{2n-1} \cos \frac{\pi w}{K} + h^{4n-2}},$$

където $h = e^{i\pi\tau}$, $\theta_0(w+2K) = \theta_0(w)$, $\operatorname{sn}(u+4K) = \operatorname{sn} u$, което му позволява да намери събирателна формула за $\operatorname{sn}(u+v)$.

11. Ще кажа няколко думи за знаменитата теория на Хамилтън – Якоби, която е имала широко приложение в механиката през XIX в., а и досега се използва в математическата физика и в теорията на псевдодиференциалните оператори. Тя дава интересна връзка между хамилтоновите системи ОДУ в $\mathbb{R}^{2n}$ и нелинейните частни диференциални уравнения от I ред, но с $n+1$ независими променливи. И така, да разгледаме нелинейното ЧДУ

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(x,p) = 0, \tag{1}$$

където $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = \nabla_x V$, $H \in C^2$ и съответната му хамилтонова система ОДУ е

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Както знаем, хамилтонианът $H(x, p)$ е пръв интеграл на (2), т.е. $H(x(t), p(t)) \equiv \mathrm{const}$ върху всяка интегрална крива на (2).

Да предположим, че $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и a_{n+1} са реални параметри, запълващи някаква област в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ще казваме, че функцията $V = V(t, x, a) + a_{n+1}$ е пълен интеграл на (1), ако $V = V(t, x)$ удовлетворява (1) за всяка стойност на (a, a_{n+1}) и още $\det \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_j} \right) \neq 0$. Якоби доказа, че ако V е пълен интеграл на (1), общото решение на (2) се дава от равенствата

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Означаваме $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Казано малко по-грубо, решенията x_i, p_i, получени от (3), зависят от (t, a, b), т.е. от $2n$ произволни константи a, b. Якоби предлага така наречения „втори метод на Якоби“ за намиране на пълни интеграли. Негов прост илюстриращ пример в това отношение е ЧДУ, описващо в сферични координати (r, θ, φ) движението на планетите в Слънчевата система:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \frac{k^2}{r} - \alpha, \tag{4}$$

където α е произволна реална константа (енергия).

Очевидно (4) не зависи явно от θ, т.е. θ е циклична координата. Той съумява да намери чрез така нареченото разделяне на променливите следния пълен интеграл на (4):

$$V = +\alpha t + \int \sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}} dr + \int \sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2 \varphi}} d\varphi + \sqrt{2\gamma}\theta + \mathrm{const}, \quad \gamma > 0, \tag{5}$$

т.е. $V = +\alpha t + W + \mathrm{const}$.

Съгласно теоремата на Якоби (при шестте параметъра α, β, γ, α', β', γ') трябва да разгледаме системата

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \gamma', \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha' - t, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \gamma', \tag{6}$$

т.е. $t - \alpha' = \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}}$ и аналогични изрази намираме за β' и γ'. Интегралите, които се срещат в лявата страна на (6), могат да се изразят чрез елементарни функции (Ойлерови субституции и т.н.). По този начин намираме траекторията на една планета около Слънцето (закон за движение) във вида $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$, като трите функции зависят от общо 6 параметъра. В Кеплеровия случай елиптични функции не са нужни.

12. Добре известно е условието на Якоби от вариационното смятане. Накратко, в точката на минимум на един функционал $\mathcal{J}$ първата вариация $\delta\mathcal{J}$ е 0, а втората $\delta^2\mathcal{J}$ е по-голяма или равна от 0. В точките на минимум са изпълнени диференциалните уравнения на Ойлер. От втората вариация пък възникват диференциалните уравнения на Якоби и понятието спрегнати точки.

Необходимото условие на Якоби за съществуване на минимум по втора вариация е неособената екстремала $x(t)$, реализираща минимум в $[t_1, t_2]$ да бъде такава, че (t_1, t_2) да не съдържа точки, спрегнати с t_1.

Ще завърша това изложение със следния забележителен според историка на математиката J. M. Cleary (Historia Math., 21, 1994, 377–385) резултат на Якоби от геометрията на пространствените криви (1842).

Сферичното изображение на нормалните направления към гладка затворена пространствена крива разделя единичната сфера на две равнолицеви области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Математическая энциклопедия, т. 5, 1985, Москва [Mathematical Encyclopedia, vol. 5, 1985, Moscow] (in Russian).

[2] И. Гельфанд, С. Фомин. Вариационное исчисление, Москва, 1961. [I. Gel'fand, S. Fomin. Variational calculus, Moscow, 1961] (in Russian).