Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

---

Mathematica
Balkanica

New series Vol. 4, 1990, Fasc. 4

Une remarque sur la classe A

Valérie Martel

Presented by M. Putinar

Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. On note de façon usuelle $L(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathfrak{H}$, et A l'ensemble des contractions T de $L(\mathfrak{H})$ absolument continues pour lesquelles le calcul fonctionnel de Nagy-Foias $\Phi_T: H^\infty \to L(\mathfrak{H})$, $f \to f(T)$ est isométrique. La classe A a joué un rôle essentiel dans la solution du problème invariant pour les contractions T dont le spectre $\sigma(T)$ contient le cercle unité T [4]. En effet un résultat ([2] Th 2.2, revu en détail dans la première partie de [5]), montre que ce problème se réduit au cas $T \in A$. Ainsi qu'il est expliqué dans [5], cette réduction consiste essentiellement à établir que, sous les hypothèses $\|T\| \leqq 1$ et $\sigma(T) \supset T$, si T n'appartient pas à A alors la fermeture de l'agèbre des $f(T)$, où f est une fonction rationelle à pôles hors de $\sigma(T)$, est non intègre.

Dans la présente note nous réexaminons la démonstration du théorème 2.2 de [2], plus précisément celle du théorème 2.1 de [5], et nous montrons qu'il peut se formuler dans le cadre de $\mathscr{A}_T$, algèbre duale unitaire engendrée par T (fermeture dans $L(\mathfrak{H})$, pour la topologie faible *, de l'ensemble des polynômes en T. Rappelons que cette topologie résulte de la dualité $L(\mathfrak{H}) = C_1(\mathfrak{H})'$, où $C_1(\mathfrak{H})$ est l'espace de Banach des opérateurs à trace finie sur H, normé par $\|S\|_1 = \operatorname{tr}(\sqrt{S^*S})$).

Enfin D désigne le disque unité ouvert dans le plan complexe.

On a le résultat suivant:

Théorème 1: *Soit* T *une contraction de* $\mathfrak{H}$ *dont le spectre contient* T. *Alors* T *appartient à* A *si et seulement si* $\mathscr{A}_T$ *est intègre.*

Remarque: Soit T une contraction. L'inégalité de Von Neumann $\|p(T)\| \leqq \sup_{\lambda \in D} |p(\lambda)|$ donne une représentation Φ_0 de l'algèbre du disque A dans $L(\mathfrak{H})$. Cette application est une isométrie si et seulement si le spectre de T contient T. En effet si p est un polynôme, on a: $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$, d'où: $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p(\lambda)| = r(p(T)) \leqq \|p(T)\| \leqq \sup_{\lambda \in D} |p(\lambda)|$.

— Si T est inclus dans $\sigma(T)$, le terme de gauche est égal à celui de droite, donc il y a égalité partout et on a: $\|p(T)\| = \|p\|_A$.

— Si Φ_0 est isométrique, on montre que pour tout λ dans T la suite $(A_n)_{n \in N^*}$ définie par $A_n = \Sigma_{0 \leqq i \leqq n-1} T^p/\lambda^p$ vérifie: $\|A_n\| = n$ et $\|(\lambda - T)A_n\| = \|\lambda(I - T^n/\lambda^n)\| \leqq 2$, donc λ est dans $\sigma(T)$.

Démonstration:

1-ère étape ($\Rightarrow$): Il résulte du théorème 4.3 de [3] que si T appartient à A, Φ_T est un isomorphisme de H^∞ sur $\mathscr{A}_T$, or H^∞ est intègre, donc $\mathscr{A}_T$ l'est aussi.

2-ème étape ($<=$): On suppose $\mathscr{A}_T$ intègre et on montre successivement que T est absolument continue et que Φ_T est une isométrie. Rappelons que T est dite absolument continue si sa partie unitaire est triviale ou de mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue m sur T. Il est bien connu (voir, par exemple, [8]) que si T n'est pas absolument continue, alors $\mathscr{A}_T = \mathscr{A}_{Ta} \oplus \mathscr{A}_{Ts}$. $\mathscr{A}_{Ts}$ contient une algèbre isomorphe à $L^\infty(\mu_s)$, qui est non intègre si $\mu_s \neq 0$. Donc si $\mathscr{A}_T$ est intègre, μ_s est nul, autrement dit T est absolument continu, et le calcul de Nagy-Foias est défini sur tout H^∞.

L'ensemble $\sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$ des complexes λ pour lesquels λ-T est non inversible dans $\mathscr{A}_T$ est inclus dans $\sigma(T)$. Soit $\zeta_\theta(T) = (D \cap \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)) \cup \{\lambda \in D \backslash \sigma_{\mathscr{A}_T}(T) / \theta \, \|(\lambda - T)^{-1}\| \geqq (1 - |\lambda|)^{-1}\}$ où $\theta \in]0, 1[$. Par définition de $\sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$ on a pour $\lambda \in D \backslash \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$:$(\lambda - T)^{-1} \in \mathscr{A}_T$, et pour $h \in H^\infty$ et $\lambda \in D \cap \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$:$h(\lambda) \in \sigma_{\mathscr{A}_T}(h(T))$.

Un résultat intermédiaire sera utile:

Lemme: S'il existe $\theta \in]0, 1[$ pour lequel $\zeta_\theta(T)$ n'est pas dominant sur T, alors $\mathscr{A}_T$ n'est pas intègre.

Démonstration: Elle est analogue à celle du théorème 2.1a de [5]: On construit deux lacets γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \backslash T$ soit disjoint de $\sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$ et que sur cet ensemble on ait: $\theta \, \|(\lambda - T)^{-1}\| \leqq (1 - |\lambda|)^{-1}$. On note $\lambda_{i,1}$ et $\lambda_{i,2}$ les points d'intersection de γ_i et T, et φ_i la fonction $\lambda \to (\lambda - \lambda_{i,1})(\lambda - \lambda_{i,2})$. La fonction $\lambda \to \|\varphi_i(\lambda)(\lambda - T)^{-1}\|$ est bornée sur $\gamma_i \backslash T$. On définit donc un opérateur A_i par: $A_i = (2i\pi)^{-1} \int_{\gamma_i} \varphi_i(\lambda)(\lambda - T)^{-1} d\lambda$.

On a $A_i \in \mathscr{A}_T$ car $\gamma_i \backslash T$ est inclus dans $C / \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$ et $A_1 A_2 = 0$.

Il reste à prouver que A_i est non nul. La démonstration s'adaptant indifféremment à A_1 et A_2 on laisse ici tomber l'indice: pour tout μ de l'arc ouvert d'extrémités λ_1 et λ_2 intérieur à γ on a: $\varphi(\mu) = (2i\pi)^{-1} \int_\gamma \varphi(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda$, d'où $A - \varphi(\mu) = (2i\pi)^{-1} \int_\gamma \varphi(\lambda) [(\lambda - T)^{-1} - (\lambda - \mu)^{-1}] d\lambda$.

Comme $\mu \in T$ et $T \subset \sigma(T)$, pour tout $\lambda \in \gamma$, $(\lambda - \mu)^{-1}$ est élément de $\sigma((\lambda - T)^{-1})$. Plus précisément toute somme de Riemman $\Sigma \varphi(\xi_i) [(\xi_i - T)^{-1} - (\xi_i - \mu)^{-1}]$ se met sous la forme $(\mu - T)S$, où S est un opérateur qui commute avec T, donc est non inversible. Finalement $\varphi(\mu) \in \sigma(A)$ donc $\sigma(A) \neq \{0\}$ et par suite $A \neq 0$.

Reprenons maintenant la démonstration du théorème 1:

Ici on suppose $\mathscr{A}_T$ intègre donc, via le lemme ci-dessus, tout $\theta \in]0, 1[$ donne un ensemble $\zeta_\theta(T)$ dominant pour T. En particulier on peut fixer un $\theta \in]0, 1/3[$. La fin du raisonnement est analogue à celle du théorème 2.1 b' de [5]: Soit $h \in H^\infty$, il s'agit de montrer $\|h(T)\| \geqq \|h\|_\infty$, ce qui assurera l'égalité vu l'inégalité de Von Neumann. On montre d'abord $(1 - 3\theta)\|h\|_\infty \leqq \|h(T)\|$ pour tout $h \in H^\infty$.

Soit donc $\lambda \in \zeta_\theta(T)$.

$-$ Si $\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$ on a $h(\lambda) \in \sigma_{\mathscr{A}_T}(h(T))$ donc $|h(\lambda)| \leqq r(h(T)) \leqq \|h(T)\|$ et $|h(\lambda)| - 3\theta\|h\|_\infty \leqq \|h(T)\|$.

$-$ Si $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{A}_T}(T)$, il existe v unitaire dans $\mathfrak{H}$ tel que $\|(\lambda - T)^{-1} v\| > (3/2\theta)^{-1}(1 - |\lambda|)^{-1}$. $u = (\lambda - T)^{-1} v / \|(\lambda - T)^{-1} v\|$ est unitaire et vérifie: $\|(\lambda - T)u\| \leqq (3/2\theta)(1 - |\lambda|)$.

D'où $\|h(T)\| \geqq \|h(T)u\| \geqq |h(\lambda)| - 3\theta\|h\|_\infty$.

On a finalement $\|h(T)\| \geqq |h(\lambda)| - 3\theta\|h\|_\infty$ pour tout $\lambda \in \zeta_\theta(T)$, et cet ensemble étant dominant pour T le passage à la norme uniforme donne $\|h(T)\| \geqq (1-3\theta)\|h\|_\infty$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\|h(T)\|^n \geqq \|h^n(T)\| \geqq \|h^n\|_\infty(1-3\theta) = (\|h\|_\infty)^n(1-3\theta)$, d'où $\|h(T)\| \geqq \|h\|_\infty (1-3\theta)^{1/n}$, et en faisant tendre n vers ∞, $\|h(T)\| \geqq \|h\|_\infty$. L'application $H^\infty \to \mathscr{A}_T : h \to h(T)$ est donc une isométrie et $T \in A$.

Nous concluons cette note par quelques remarques:

1) Le résultat s'étend sans difficultés au cas d'un opérateur M-polynomialement borné. Rappelons qu'un opérateur T est dit M-polynomialement borné s'il admet le disque unité fermé comme ensemble M-spectral, c'est à dire que pour tout polynôme p on a $\|p(T)\| \leqq M\|p\|_\infty$, où $\|p\|_\infty = \sup_{z \in D}|p(z)|$. La classe A^M a été définie dans [1] comme l'ensemble des opérateurs M-polynomialement bornés tels que $\mathscr{A}_T$ soit faible*-homéomorphe à H^∞. On obtient:

Théorème 2: *Soit* T *un opérateur* M-*polynomialement borné dont le spectre contient* $\mathbf{T}$. *Alors* T *appartient à* A^M *si et seulement si* $\mathscr{A}_T$ *est intègre.*

2) Si on s'affranchit de la condition $\sigma(T) \supset \mathbf{T}$, on peut également formuler une extension partielle du théorème 1 sous la forme suivante, basée sur la notion d'ensemble essentiel pour une contraction absolument continue.

Théorème 3: *Soit* T *une contraction absolument continue sur* $\mathfrak{H}$. *Si* $\sigma(T) \cap \mathbf{T}$ *n'est pas essentiel pour* T, *alors* $\mathscr{A}_T$ *n'est pas intègre.*

Notons qu'il n'y a pas de réciproque à espérer, il suffit pour le voir de considérer T tel que $\sigma(T)$ soit inclus dans D et non connexe.

Avant de clore, il m'est agréable de remercier Bernard Chevreau, dont l'aide a été précieuse pour l'élaboration de cette note.

Bibliographie

1. Dosou Akiola. Sous-espaces invariants pour certains opérateurs polynomialement bornés. Preprint.
2. C. Apostol. Ultraweakly closed operators algebras. *J. Operator Theory*, **2**, 1976, 49-61.
3. H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy. Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilatation theory. — In: *C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math.* 56, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1985.
4. S. Brown, B. Chevreau, C. Pearcy. On the structure of contraction operators. II. *J. Funct. Analysis*, **76**, 1988, 30-57.
5. B. Chevreau, C. Pearcy. Growth conditions on the resolvent and membership in the classes A and $A_{\aleph_0}$. *J. Operator Theory*, **16**, 1986, 375-386.
6. B. Chevreau. Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique II. *J. Operator Theory*, **20**, 1988, 269-293.
7. K. Hoffman. Banach spaces of analytic functions. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*, 1965.
8. F. Zarouf. On uniform dual algebras. Preprint.

Université Paris VI-45/46 5ème étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
FRANCE

Received 07.12.1989