Матбой МБОМ: 05.06.2018

B1. За положителните числа a, b и c е известно, че $ab^2 + c^3 < bc^2 + a^3 < ca^2 + b^3$.

а) Кои две от числата могат да бъдат равни?

б) Ако дадените числа са различни, то кое от тях не може да е най-малкото?

B2. Ако a, b, c са страни на триъгълник, докажете, че

$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)} + \frac{b}{(a+c)(a+c-b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Кога се достига равенство?

B3. Върху страните AB и BC на триъгълника ABC, външно за триъгълника, са построени правоъгълните триъгълници $ABD\left(\angle ADB = 90^\circ\right)$ и $BCE\left(\angle BEC = 90^\circ\right)$. Да се докаже, че $AB + BC + CA \geq 2DE$.

B4. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$, в който $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle BAD = \angle ADC = 80^\circ$. Върху страните BC и AD на четириъгълника са взети съответно точките N и M така, че $\angle CDN = \angle ABM = 20^\circ$. Намерете $\angle MNB$, ако е известно, че $MD = AB$.

B5. Даден е ΔADC със страна $AC = 1$ и окръжности $k_1(A)$ и $k_2(C)$, които се пресичат в точка D. Произволна права през D пресича за втори път окръжностите съответно в точките M и N.

а) Докажете, че симетралите на отсечките MN имат обща точка.

б) Определете най-голямата възможна дължина на отсечката MN.

B6. Естествените числа x, y и k са такива, че $x(x+1)(x+2) = y^k$. Да се докаже, че $k = 1$.

B7 Да се намерят всички тройки цели числа $x, y, z,$ за които $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2$.

B8. На състезание по математика с 4 задачи се явили 7 деца. За всяка двойка задачи има дете, решило само тях. По колко различни начина може да се случи това?

B9. В квадратна таблица 5×5 отначало всички полета са празни, като едно от тях е оцветено. Двама играчи, X и O, правят ходове, редувайки се. Който е на ход, поставя името си в незаето поле на таблицата, съседно (по страна или връх) на последното заето поле. Пръв е X, като при първия си ход може да играе в произволно неоцветено поле. Ако някой не може да играе, играта приключва с победа на другия. Ако някой постави знака си в оцветеното поле, той печели и играта приключва. Кой ще спечели при правилна игра? (Отговорът може да зависи от позицията на оцветеното поле.)

B0. Какъв е най-големият възможен брой остри ъгли в n-ъгълник (не непременно изпъкнал)?