Подготовка за МОМ 2019

Задача 1. (1997, Румъния, контролно за МОМ) Нека $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ и $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$ е реципрочен полином (т.е. $a_i = a_{n-i}$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$) с цели положителни коефициенти. Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки естествени числа (x, y), за които $x|P(y)$ и $y|P(x)$.

Решение. Да отбележим, че двойки от разглеждания вид съществуват – една такава е $(1, P(1))$, защото 1 дели $P(1)$ и $P(1)$ дели $P(1)$. Да допуснем, че тези двойки са краен брой. Тогава тези от тях, за които $x \leq y$ също са краен брой и нека (x_0, y_0) е двойка, за която $x_0 \leq y_0$, $x_0|P(y_0)$, $y_0|P(x_0)$ и y_0 е максимално възможно. Ясно е, че $y_0 \geq 2$. Ще докажем, че двойката $(y_0, \frac{P(y_0)}{x_0})$ удовлетворява условието, като при това $\frac{P(y_0)}{x_0} > y_0$, достигайки по този начин до противоречие.

Ясно е, че $\frac{P(y_0)}{x_0}$ дели $P(y_0)$. Освен това $P(y_0) \geq y_0^n + 1 > y_0^2 \geq x_0y_0$, т.е. $\frac{P(y_0)}{x_0} > y_0$. Остава да докажем, че y_0 дели $P(\frac{P(y_0)}{x_0})$.

Тъй като x_0 и y_0 са взаимно прости (в противен случай от $y_0|P(x_0)$ следва, че някой прост делител на y_0 дели 1), съществува естествено число z, за което $x_0z \equiv 1 (\text{mod } y_0)$. Тогава $x_0z \equiv P(y_0)(\text{mod } y_0) \iff z \equiv \frac{P(y_0)}{x_0}(\text{mod } y_0)$. От последното сравнение следва, че $P(z) \equiv P(\frac{P(y_0)}{x_0})(\text{mod } y_0)$, т.е. е достатъчно да докажем, че $P(z) \equiv 0(\text{mod } y_0)$.

От реципрочността (която все още не сме използвали) на $P(x)$ следва, че $x^nP(\frac{1}{x}) = P(x)$. Тогава $x_0^nP(x_0^{-1}) \equiv P(x_0) \equiv 0(\text{mod } y_0)$, откъдето $x_0^nP(z) \equiv 0(\text{mod } y_0) \iff P(z) \equiv 0(\text{mod } y_0)$, защото x_0 и y_0 са взаимно прости.

Задача 2. (RMM 2007) Нека a е естествено число. Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $m \in \mathbb{N}$, такова, че n дели $a^m - m$.

Решение. Ще докажем с индукция по n, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществуват безбройно много $m = a^s \in \mathbb{N}$, такова, че n дели $a^m - m$.

При $n = 1$ твърдението е очевидно. При $n = 2$ е достатъчно да отбележим, че числото $a^{a^s} - a^s$ е четно. Нека $n \geq 3$ и да представим n във вида $n = pq$, където $(a, q) = 1$ и всички прости делители на p са делители и на a. Нека $p = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на p и $s \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Тогава p дели a^s за да докажем, че $n = pq$ дели $a^{a^s} - a^s = a^s(a^{a^s-s} - 1)$, е достатъчно да видим, че q дели $a^{a^s-s} - 1$ за някои (безбройно много) s.

Имаме $\varphi(q) < q < pq = n$. Тогава съгласно индукционното предположение съществуват безбройно много стойности на s, за които $\varphi(q)$ дели $a^s - s$. За тези s имаме $a^{a^s-s} \equiv 1 \pmod{q}$, което означава, че q дели $a^{a^s-s} - 1$ за някои (безбройно много) s. С това доказателството е завършено.

Задача 3. (1997, Румъния, контролно за МОМ) Нека $a > 1$ е естествено число. Да се докаже, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ множеството $\{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, \ldots, a^{n+1} + a^n - 1, \ldots\}$ съдържа k на брой две по две взаимно прости числа.

Решение. Лесно се вижда, че всеки две съседни числа от разглежданото множество са взаимно прости (ако имат общ прост делител, той дели $a - 1$, оттам дели a – противоречие). Нека $a^{n_1+1} + a^{n_1} - 1, a^{n_2+1} + a^{n_2} - 1, \ldots, a^{n_k+1} + a^{n_k} - 1$ са k, $k \geq 2$ числа от дадените, всеки две от които са взаимно прости. Ще покажем, към тях може да се добави още едно от дадените, което е взаимно просто с всяко от тях.

Нека $N = \prod_{i=1}^{k}(a^{n_i+1} + a^{n_i} - 1)$. Очевидно $(a, N) = 1$ и следователно $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$. Тогава $(N, a^{\varphi(N)+1} + a^{\varphi(N)} - 1) = 1$, защото в противен случай N и $a^{\varphi(N)+1}$ ще имат общ прост делител. Но това означава, че $a^{\varphi(N)+1} + a^{\varphi(N)} - 1$ е взаимно просто с всяко от числата $a^{n_1+1} + a^{n_1} - 1, a^{n_2+1} + a^{n_2} - 1, \ldots, a^{n_k+1} + a^{n_k} - 1$.

Задача 4. (БОМ2005) Нека S е подмножество на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, такова, че S не съдържа нито два елемента, единият от които дели другия, нито два елемента, които са взаимно прости числа. Колко е максималният възможен брой елементи на такова множество?

Решение. Да разгледаме множеството от всички четни числа, по-големи от $\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Ясно е, че всеки две от тези числа имат общ делител 2 и никое от тях не дели друго, защото най-голямото е по-малко от удвоеното най-малко. Следователно съществува множество с исканите свойства и $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$ елемента.

Нека S има исканото свойство. Ако в S има число $a \leq \left[\dfrac{n}{2}\right]$, можем да вземем най-малкото такова число и да го заменим с $2a$. Новото множество има исканите свойства и същия брой елементи. Следователно можем да считаме, че всички числа от S са по-големи от $\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Тъй като не е възможно в S да има две съседни числа, заключаваме, че в S има най-много $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$ елемента, освен евентуално в случая, когато $n = 4k+1$. Тогава е достатъчно да се отбележи, че $2k+1$ и $4k+1$ не могат да принадлежат едновременно на S.

Следователно търсеният максимален брой елементи на S е $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$.

Задача 5. (БОМ 2005) Да се намерят всички прости числа p, за които $p^2 - p + 1$ е точен куб на цяло число.

Решение. Нека $p^2 - p + 1 = a^3$, т.е. $p(p-1) = (a-1)(a^2+a+1)$. Очевидно $1 < a < p$ и значи p е делител на a^2+a+1. Следователно $a^2+a+1 = bp$, $p-1 = b(a-1)$ и оттук $a^2+a+1 = b(b(a-1)+1)$. Лесно се проверява, че $b > 2$ и тогава

$$a + 1 < \frac{a^2+a+1}{a} < b^2 < \frac{a^2+a+1}{a-1} \leq a+3,$$

откъдето $b^2 = a+2$. Сега $a^2+a+1 = (a+2)(a-1)+b$, което показва, че $b = 3$, $a = 7$ и $p = 19$.

Задача 6. (Румъния 2001, 10) Нека $n \geq 2$ е четно естествено число и $a, b \in \mathbf{R}$ са такива, че $b^n = 3a+1$. Да се докаже, че полиномът $P(x) = (x^2+x+1)^n - x^n - a$ се дели на $q(x) = x^3+x^2+x+b$ тогава и само тогава, когато $b = 1$.

Решение. Достатъчността на условието $b = 1$ е очевидна. Да предположим, че $q(x)$ дели $p(x)$. Тогава от представянето $x^n p(x) = (x^3+x^2+x)^n - x^{2n} - ax^n = (q(x)-b)^n - x^{2n} - ax^n$ следва, че $q(x)$ дели полинома $x^{2n} + ax^n - b^n$. Следователно n-тите степени на нулите на $q(x)$ (да ги означим с x_1, x_2 и x_3)са корени на квадратното уравнение $t^2 + at - b^n = 0$. Тъй като последните (да ги означим с t_1 и t_2) са реални и различни, имаме две възможности: $x_1^n = x_2^n = x_3^n = t_1$ или $x_1^n = x_2^n = t_1$ и $x_3^n = t_2$. Като вземем предвид това и формулите на Виет $t_1 + t_2 = -a$, $t_1 t_2 = -b^n$ и $x_1 x_2 x_3 = -b$, получаваме $b = 1$ и в двата случая.

Задача 7. Фокусник предлага на зрител да си намисли трицифрено число $\overline{abc}$ и да му каже сумата на числата $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Фокусникът твърди, че може по тази информация да определи $\overline{abc}$. Вярно ли е това?

Решение. Отговор – да! Да означим сумата от цифрите на x с $S(x)$. Тогава фокусникът научава числото $222S(x) - x$. Достатъчно е да докажем, че всички числа от този вид са различни за трицифрено число x.

Да допуснем, че $222S(x) - x = 222S(y) - y \iff x - y = 222(S(x) - S(y))$ за някои различни трицифрени x и y. Очевидно $S(x) \neq S(y)$ (иначе $x = y$). Тъй като $S(x) - x$ и $S(y) - y$ се делят на

9, заключаваме, че $221(S(x)-S(y))$, оттам и $S(x)-S(y)$ се дели на 9. Тогава $|S(x)-S(y)| \geq 9$ и $|x-y| \geq 9.222 > 1000$, което е невъзможно за трицифрени числа.

Задача 8. (Шортлист МОМ 2006) Да се реши в цели числа уравнението $\dfrac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$.

Решение. Лема. Нека p и q са прости числа и q дели $N = \dfrac{a^p-1}{a-1}$ за някое цяло a. Тогава $q = p$ или $q \equiv 1 \pmod p$.

Доказателство. При $p = 2$ няма какво да доказваме. Нека p е нечетно. Тогава $N = a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1$ е нечетно и значи и q е нечетно, като $(a, q) = 1$.

Имаме $a^p \equiv 1 \pmod q$ и $a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$. Следователно $a^d \equiv 1 \pmod q$, където $d = (p, q-1)$. Ако $d = 1$, получаваме $a \equiv 1 \pmod q$, откъдето $0 \equiv N \equiv p \pmod q$, т.е. $p = q$. Ако $d = p$, то $p | q-1$, т.е. $q \equiv 1 \pmod p$. С това лемата е доказана.

Да допуснем, че x и y са цели числа, за които $\dfrac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$. От лемата следва, че всички делители на лявата страна са сравними с 0 или 1 по модул 7. Тъй като $y-1$ е делител, получаваме, че y е сравнимо с 1 или 2 по модул 7. Тогава делителят $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ е сравним с 5 или 3 по модул 7, което противоречи на лемата.

Задача 9. (Туймаада 2008) Измежду естествените числа, ненадминаващи 501, са избрани 250 числа. Да се докаже, че за приозволно цяло число t измежду избраните числа могат да се намерят 4, a_1, a_2, a_3 и a_4, за които $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - t$ се дели на 23.

Решение. Да отбележим, че всеки от остатъците $0, 1, \ldots, 22$ по модул 23 се появява най-много по 22 пъти измежду първите 501 естествени числа.

Нека a е цяло число, за което $4a \equiv t \pmod{23}$. Да разпределим избраните 250 числа в 12 групи по следното правило: в група k, $1 \leq k \leq 11$, отиват тези x, за които $x \equiv a \pm k \pmod{23}$, а в 12-тата група поставяме тези x, за които $x \equiv a \pmod{23}$.

Съществуват две числа измежду избраните, чиято сума е сравнима с $2a$ по модул 23. Действително, ако допуснем противното, всяка от първите 11 групи ще съдържа най-много по 22 числа, а в 12-тата група може да има най-много едно число – общо $11.22 + 1 = 243 < 250$. Сега да отделим тези две числа – остават ни $248 > 243$ числа и можем отново да намерим две от тях, чиято сума е сравнима с $2a$ по модул 23. Получените 4 числа имат исканото свойство.

Задача 10. (Русия 2008) За кои естествени числа $n > 1$ съществуват естествени числа $b_1, \ldots, b_n$ (не всички равни) така, че за всяко естествено число k числото $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ е точна степен на естествено число? (Показателят на степента може да зависи от k, но трябва да е по-голям от 1.)

Решение. Отговорът е всички съставни n. По-долу всички числа са естествени, освен ако не е казано друго.

Нека n е съставно число, т.е. $n = rs$, където $r, s > 1$. Да разгледаме числата $b_1 = \cdots = b_r = 1$, $b_{r+1} = \cdots = b_n = 2$. Очевидно за всяко k числото $(b_1 + k) \ldots (b_n + k)$ е точна r-та степен.

Нека сега n е просто число. Да допуснем, че за него съществува съответен набор $(b_1, \ldots, b_n)$. Можем да считаме, че b_1, $\ldots$, b_l са две по две различни числа, а всяко от числата $b_{l+1}, \ldots, b_n$ е равно на някое измежду $b_1, \ldots, b_l$ (при това $l > 1$, тъй като по условие не всички числа са равни). Нека измежду числата $b_1, \ldots, b_n$ имаме s_i равни на b_i, където $1 \leq i \leq l$ и $s_1 + \cdots + s_l = n$.

Да разгледаме l различни прости числа $p_1, \ldots, p_l$, по-големи от всички b_i и да положим $a_i = p_i^2$, $r_i = p_i - b_i$ при $1 \leq i \leq l$. Числата p_i^2 са две по две взаимно прости и $0 < r_i < p_i < p_i^2$. Да изберем m съгласно Китайската теорема за остатъците. Ще докажем, че ако $(b_1 + m) \ldots (b_n + m) = u^v$, то $v = 1$, което е противоречие.

Нека i е число между 1 и l. Числото $b_i + m$ дава остатък $r_i + b_i = p_i$ при деление на p_i^2. Следователно $b_i + m$ се дели на p_i, но не се дели на p_i^2. При $j \neq i$, $1 \leq j \leq l$ имаме, че $0 < |b_i - b_j| < p_i$ и значи $b_j + m$ не се дели на p_i. Това означава, че в каноничното разлагане на $(b_1 + m) \dots (b_n + m)$ числото p_i е на степен s_i.

Следователно v дели всички s_i, а значи и тяхната сума n. Понеже $l > 1$, то $v < n$. Оттук $v = 1$, което искахме да докажем.

Задача 11. (Полша 2007) Нека a, b, c и d са естествени числа, за които $ad = b^2 + bc + c^2$. Да се докаже, че числото $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ е съставно.

Решение. Да допуснем, че $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ е просто число. Имаме $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+d)^2 + b^2 + c^2 - 2ad = (a+d)^2 + b^2 + c^2 - 2(b^2 + bc + c^2) = (a+d)^2 - (b+c)^2 = (a+b+c+d)(a+d-b-c)$ и, тъй като $a + b + c + d \geq 4$, заключаваме, че $a + b - b - c = 1$.

От друга страна, лесно се вижда, че $(a+d)^2 \geq 4ad = 4(b^2 + bc + c^2) > 3(b+c)^2$, откъдето $b + c = a + d - 1 \geq \sqrt{3}(b+c) - 1$, което е невъзможно.

Задача 12. (Китай 2010, 2) Дадено е цяло число $k \geq 3$ и редица $\{a_n\}$, за която $a_k = 2k$ и за всяко $n \geq k$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & \text{ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ са взаимнопрости} \\ 2n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Да се докаже, че числото $a_n - a_{n-1}$ е просто за безбройно много n.

Решение. Нека $a_\ell = 2\ell$ за някое $\ell \geq k$ и да проследим какво става с редицата малко след a_ℓ. Лесно се вижда, че ако p е най-малкият прост делител на $\ell - 1$, то $(\ell - 1, i) = \begin{cases} 1 \text{ ако } 1 \leq i < p, \\ p \text{ ако } i = p \end{cases}$. Следователно имаме

$$(2\ell + i - 2, \ell + i - 1) = \begin{cases} 1, & \text{ако } 1 \leq i < p, \\ p, & \text{ако } i = p, \end{cases}$$

което означава, че

$$a_{\ell+i-1} = \begin{cases} 2\ell + i - 1, & \text{ако } 1 \leq i < p, \\ 2\ell + 2p - 2, & \text{ако } i = p \end{cases}$$

Тогава

$$a_{\ell+p-1} - a_{\ell+p-2} = (2\ell + 2p - 2) - (2\ell + p - 2) = p$$

е просто число. Следователно съществуват безбройно много $\ell \geq k$ за които $a_\ell = 2\ell$ и $a_{\ell+p-1} - a_{\ell+p-2} = p$ е най-малкият прост делител на $l - 1$.

Задача 13. (Контролно България, 2011) Нека $n \geq 3$ е нечетно естествено число и

$$S = \{k \in \mathbb{N} : (k, n) = (k+1, n),\ 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Да се намери остатъкът при делението на числото $\prod_{k \in S} k$ на n.

Решение. Лесно се вижда, че $(k, n) = (k+1, n) = 1$. Тогава за всяко $k \in S$ съществува единствено $k_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, за което $(k_1, n) = 1$ и $kk_1 \equiv 1 \pmod{n}$. От $k_1 + 1 \equiv k_1(k+1) \pmod{n}$ следва, че $(k_1 + 1, n) = 1$, т.е. $k_1 \in S$, а от $(k-1)(k_1+1) \equiv k - k_1 \pmod{n}$ следва, че $k \neq k_1$ освен при $k = 1$. Тогава числата от $S \setminus \{1\}$ се разбиват на непресичащи се двойки от вида (k, k_1) и вече е очевидно, че търсеният остатък е 1.

Задача 14. (Русия 2010, 10 клас, 7) Дадени са $n \geq 3$ две по две взаимнопрости числа. Известно е, че при деление на произведението на кои да е $n - 1$ от числата на оставащото число се получава едни и същи остатък r. Да се докаже, че $r \leq n - 2$.

Решение. Твърдението е тривиално при $r = 0$ и затова нека $r > 0$. Да означим дадените числа с $a_1, \dots, a_n$ и нека $P = a_1 a_2 \dots a_n$, $P_i = P/a_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Да забележим, че $a_i > r$ (защото P_i дава остатък r при деление на a_i).

Да разгледаме числото $S = P_1 + P_2 + \dots + P_n - r$. Имаме $a_1 | S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \dots + P_n)$, понеже и двете събираеми се делят на a_1. Аналогично, $a_i | S$ за всички $i = 1, \dots, n$. Оттук и от условието следва, че $a_1 \dots a_n = P | S$. Тъй като $S > a_1 - r > 0$, получаваме $S \geq P$ и тогава $P_1 + \dots + P_n = S + r > P$. Следователно $P_i > P/n$ за някое i, откъдето $a_i < n$, т.е. $a_i \leq n - 1$. Тогава $r < a_i \leq n - 1$, т.е. $r \leq n - 2$.

Задача 15. (Япония 2010, 2) Нека k е естествено число и m е цяло нечетно число. Да се докаже, че съществува естествено число n, за което 2^k дели $n^n - m$.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по k. При $k = 1$ можем да вземем n нечетно. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е такова, че $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^k}$. Очевидно n_0 е нечетно.

Ако $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^{k+1}}$, няма какво да доказваме. В противен случай ще докажем, че $n = n_0 + 2^k$ върши работа.

Имаме $n_0^{n_0} - m = d2^k$, където d е нечетно и следователно $n_0^{n_0} - m - 2^k = (d-1)2^k$ се дели на 2^{k+1}. От теоремата на Ойлер следва, че $n^{2^k} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. Тогава

$$\begin{aligned} n^n &= n^{n_0 + 2^k} = n^{n_0} n^{2^k} \equiv n^{n_0} \equiv (n_0 + 2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0 - 1} 2^k \\ &\equiv m + 2^k + n_0^{n_0} 2^k = m + (n_0^{n_0} + 1) 2^k \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Следователно $n^n - m \equiv (n_0^{n_0} + 1) 2^k \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$.

Задача 16. Нека $p \geq 7$ е просто число. Да се докаже, че числото

$$\binom{p}{1}^4 + \binom{p}{2}^4 + \dots + \binom{p}{p-1}^4$$

се дели на p^5.

Решение. Да отбележим, че $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ за всяко $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Това лесно следва от умножаване на сравненията $-i \equiv p - i \pmod{p}$ за $i = 1, 2, \dots, k$.

Следователно $\frac{k}{p}\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}$, което означава, че $\binom{p}{k} = \frac{p(a_k p \pm 1)}{k}$ за някое естествено число a_k. Тогава разглежданата сума от биномни коефициенти се дели на p^4 и остава да докажем, че числото $A = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(a_k p \pm 1)^4}{k^4}$ се дели на p при $p \geq 7$.

За всяко $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ да означим с k_0 единственото число от $\{1, 2, \dots, p-1\}$, за което $kk_0 \equiv 1 \pmod{p}$ (не е трудно да се види, че k_0 съществува, определено е еднозначно и на различно k отговарят различни k_0). Тогава

$$A \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(a_k p \pm 1)^4}{k^4} \equiv \sum_{k_0} k_0^4 = \sum_{i=1}^{p-1} i^4 = \frac{p(p-1)(2p-1)(3p^2 - 3p - 1)}{30}.$$

Оттук очевидно следва, че A се дели на p тогава и само тогава, когато $p \geq 7$.

Задача 17. (Русия 2005, 11.4) Естествените числа $x > 2$, $y > 1$ и z са такива, че $x^y + 1 = z^2$. Нека $f(a)$ означава броя на различните прости делители на a. Да се докаже, че $f(x) \geq f(y) + 2$.

Решение. Очевидно y е нечетно. Лесно се вижда, че z е нечетно (в противен случай $z - 1$ и $z + 1$ са взаимнопрости, оттам точни y-ти степени, противоречие). Тогава x е четно и $\frac{x^y}{4} = k(k+1)$, където $z = 2k + 1$. Следователно $k = \frac{a^y}{4}$, $k + 1 = b^y$ или $k + 1 = \frac{a^y}{4}$, $k = b^y$, където $(a, b) = 1$, $ab = x$. В частност, оттук имаме $f(a) \leq f(x) - 1$. Да отбележим, че a е четно, а b е нечетно.

Нека $y = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на y (в частност, $f(y) = s$), където простите числа p_i са нечетни. Ще разгледаме случая $\frac{a^y}{4} = b^y + 1$ (другият е аналогичен).

Числата $\frac{b^{p_i}+1}{b+1} = b^{p_i-1} - b^{p_i-2} + \dots + b_i^2 - b_i + 1$ са нечетни (отляво има нечетен брой нечетни събираеми), като всяко от тях дели $b^{p_i} + 1$, оттам $b^y + 1$, а оттам и a^y. Освен това имаме $(\frac{b^{p_i}+1}{b+1}, \frac{b^{p_j}+1}{b+1}) = (b^{p_i} + 1, b^{p_j} + 1) = 1$ при $i \neq j$. Следователно $f(a) \geq s + 1$ (да напомним, че a е четно, а от $\frac{b^{p_i}+1}{b+1} | a^y$ идват само нечетни прости делители). Окончателно $s = f(y) \leq f(a) - 1 \leq f(x) - 2$.

Задача 18. Нека m и n са естествени числа и $m + i = a_i b_i^2$ за $i = 1, 2, \dots, n$, където a_i и b_i са естествени числа и a_i са свободни от квадрати. Намерете всички възможни стойности на n, за които съществува m, такова, че $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 12$.

Решение. Ясно е, че $n \leq 12$. Тогава най-много три от числата $m + i$ са точни квадрати, което означава, че $a_i \geq 2$ за останалите и оттук $n \leq 7$.

Ще докажем, че $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Действително, ако допуснем противното, получаваме $m+i = ab_i^2 < m+j = ab_j^2$, откъдето $6 \geq n-1 \geq j-i = (m+j)-(m+i) = a(b_j^2-b_i^2)$. Това дава възможностите $(b_i, b_j, a) = (1, 2, 2)$ и $(2, 3, 1)$, като и в двата случая лесно виждаме, че $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 12$.

Следователно a_i са различни числа от множеството $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11\}$, което оставя само възможностите $n \in \{2, 3, 4\}$. Да допуснем, че $n = 4$. Тогава $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 3, 6\}$ и следователно

$$(6b_1b_2b_3b_4)^2 = (m + 1)(m + 2)(m + 3)(m + 4) = (m^2 + 5m + 5)^2 - 1,$$

което е невъзможно.

При $n = 3$ е възможно $m = 3$ (числата са 4, 5 и 6), а при $n = 2$ е възможно $m = 99$ (числата са 99 и 100).

Задача 19. Съществува ли естествено число m, за което уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = \frac{m}{x + y + z}$$

има безбройно много решения в естествени числа x, y и z?

Решение. При $x = y = z = 1$ получаваме $m = 12$. Ще докажем, че уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = \frac{12}{x + y + z} \iff x^2(y + z) + x(y^2 + z^2 + 1 - 9yz) + (yz + 1)(y + z) = 0 \qquad (1)$$

има безбройно много решения в естествени числа x, y и z.

Тъй като (1) е квадратно уравнение относно x, ако x_0 е решение, то и $x_0' = \dfrac{yz + 1}{x_0}$ също е решение. При това, ако $x < y < z$ е решение, то $y < z < \frac{yz+1}{x}$ също е решение, което е различно от предишното (но засега не е ясно дали е в естествени числа). Следователно е достатъчно да докажем, че редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирана чрез равенствата $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-2}}$ при $n \geq 2$, се състои от естествени числа.

Имаме $a_{n+1}a_{n-2} = a_n a_{n-1} + 1$ и $a_n a_{n-3} = a_{n-1}a_{n-2} + 1$, откъдето

$$a_{n-2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}}.$$

Последното равенство означава, че

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{a_2+a_0}{a_1} & = 2 \text{ при нечетно } n \\ \frac{a_3+a_1}{a_2} & = 3 \text{ при четно } n \end{cases},$$

с което доказателството е завършено.