Целозначни функции и делимост

П. Бойваленков
Институт по математика и информатика, БАН

Семинар по олимпийска математика
Созопол, 3-10 септември 2017

Задачите, в които се изисква изследване и/или намиране на целозначни функции, предполагат използване на аргументи не само от теорията на числата (делимост, индукция), но и от комбинаториката (броене, избор на екстремален елемент, взаимноеднозначно съответствие) и анализа (оценка, монотонност, инективност). Понякога е по-лесно да се разбере поведението на изследваната функция в "по-удобно" за изследване множество (например намиране на важни стойности, изследване за четните или нечетните числа, за простите числа и т.н.).

Задача 1.

Задача 1. (Румъния 2004, 9 клас) Да се намерят всички строго растящи функции

$$f : \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \to \{1, 2, 3 \ldots, 100\},$$

за които

$$x + y | xf(x) + yf(y)$$

за всеки две числа $x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

Задача 1.

Решение.

$$x+y \mid xf(x)+yf(y)=(x+y)f(x)+y(f(y)-f(x)),$$

$$\Longrightarrow \; x+y \mid y(f(y)-f(x)).$$

Полагаме $y=x+1 \implies 2x+1 \mid (x+1)(f(x+1)-f(x))$

$$\Longrightarrow \; 2x+1 \mid f(x+1)-f(x).$$

$$\Longrightarrow \; f(x+1)-f(x) \geq 2x+1 \iff f(x+1) \geq f(x)+2x+1.$$

$$\Longrightarrow \; f(1) \geq 1,\; f(2) \geq 4,\; f(3) \geq 9, \ldots, f(x) \geq x^2 \; \forall x$$

Но, от друга страна, $f(10) \leq 100$

$$\Longrightarrow \; f(10)=100 \implies f(9)=81, \ldots f(1)=1$$

Окончателно $f(x)=x^2$, като лесно се вижда, че тази функция има исканото свойство.

Задача 2.

Задача 2. (Шортлист МОМ 2016) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ със следното свойство:

за всяка двойка (m, n) от естествени числа

$$\Longrightarrow \quad f(m) + f(n) - mn | mf(m) + nf(n).$$

Задача 2.

Решение. $m = n = 1 \implies f(1) = 1$

$n = p$ е просто и $m = 1$

$$\implies f(p) - p + 1 | pf(p) + 1 = p(f(p) - p + 1) + p^2 - p + 1$$

$$\implies f(p) - p + 1 | p^2 - p + 1.$$

Ако $f(p) - p + 1 = p^2 - p + 1$, то $f(p) = p^2$, в противен случай (оценка)

$$f(p) - p + 1 \leq \frac{p^2 - p + 1}{3} \iff f(p) \leq \frac{p^2 + 2p - 2}{3}. \qquad (1)$$

$m = n = p \implies 2f(p) - p^2 | p^3$

Тази делимост обаче противоречи на (1) при $p \geq 7$. Действително,

$$-p^2 < 2f(p) - p^2 \leq -p$$

за $p \geq 7$. Следователно $f(p) = p^2$ за всяко просто $p \geq 7$.

Задача 2.

n – фиксирано, p – достатъчно голямо просто число.

$m = p \implies$

$$p^2 + f(n) - pn | p^3 + nf(n) = p(p^2 - pn + n^2) + n(p^2 + f(n) - pn)$$

$$\implies p^2 + f(n) - pn | p(p^2 - pn + n^2)$$

Но $(p, p^2 + f(n) - pn) = (p, f(n)) = 1$ за достатъчно голямо p

$$\implies p^2 + f(n) - pn | p^2 - pn + n^2$$

$$\implies p^2 + f(n) - pn | p^2 - pn + n^2 = (p^2 + f(n) - pn) - (f(n) - n^2)$$

$$\implies p^2 + f(n) - pn | f(n) - n^2$$

Сега е ясно, че $f(n) = n^2$.

Задача 3.

Задача 3. (МОМ 1998) Разглеждаме всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които

$$f(n^2 f(m)) = mf^2(n)$$

за всеки две естествени числа m и n.
Да се намери най-малката възможна стойност на $f(1998)$.

Задача 3.

Решение. Да положим $f(1)=x$.

$$n=1 \implies f(f(m))=x^2m$$

$$m=1 \implies f(xn^2)=f^2(n)$$

Използваме тези две равенства и условието:

$$\begin{aligned} f^2(m)f^2(n) &= f^2(m)f(xn^2)=f(m^2f(f(xn^2))) \\ &= f(m^2x^3n^2)=f(x(xmn)^2)=f^2(xmn) \end{aligned}$$

$$\implies f(xmn)=f(m)f(n) \implies f(xm)=xf(m) \implies f(m)f(n)=xf(mn)$$

Ще докажем, че $x|f(m)$ за всяко естествено m

p – просто число, s и t – съответно степените на p в каноничните разлагания на x и $f(m)$

По индукция $\implies f^k(m)=x^{k-1}f(m^k)$

$\implies kt \geq (k-1)s \forall k \implies t \geq s \implies x|f(m)$

Задача 3.

Полагаме $g(m) = \dfrac{f(m)}{x} \implies$

$$g(1) = 1,\ g(mn) = g(m)g(n),\ g(g(m)) = m$$

(g е силно мултипликативна и е инволюция) $\implies$ g е и биекция

Ще докажем, че g приема прости стойности в простите числа
p – просто, допускаме $g(p) = uv$ за някои цели $u, v > 1$

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v),$$

$\implies$ някое от числата $g(u)$ или $g(v)$ е равно на 1, противоречие с инективността на g.

Задача 3.

g приема различни прости стойности в простите числа $\Longrightarrow$

$$f(1998) = f(1)g(1998) = f(1)g(2)g^3(3)g(37) \geq 2^3.3.5 = 120.$$

Равенство се достига например при $f(1) = 1$ (т.е. $f = g$), $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(5) = 37$, $f(37) = 5$ и $f(p) = p$ за всяко просто $p \notin \{2, 3, 5, 37\}$

$f(n)$ се строи по силната мултипликативност, т.е. ако

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_l^{r_l}$$

е каноничното разлагане на n, то

$$f(n) = f^{r_1}(p_1) f^{r_2}(p_2) \dots f^{r_l}(p_l).$$

Задача 4.

Задача 4. (Иран 2008) Дадено е естествено число k. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такива, че при произволни $m, n \in \mathbb{N}$ имаме

$$f(m) + f(n) | (m + n)^k.$$

Задача 4.

Решение. Първо ще докажем, че f е инекция.

Да допуснем, че $a \neq b$, но $f(a) = f(b)$.

От условието

$$f(a) + f(n) | (a+n)^k, \quad f(b) + f(n) | (b+n)^k$$

следва, че за всяко естествено n числата $(a+n)^k$ и $(b+n)^k$ имат общ делител $f(a) + f(n) > 1$.

Това обаче е невъзможно при $(a+n, b+n) = 1$ (което се случва например ако $n > |a-b|$ е просто число), противоречие.

Задача 4.

Ще докажем, че $f(a+1) - f(a) = \pm 1$.

От условието:

$$f(a) + f(n) | (a+n)^k, \quad f(a+1) + f(n) | (a+1+n)^k$$

и $(a+n, a+1+n) = 1$ следва, че $(f(a)+f(n), f(a+1)+f(n)) = 1$, откъдето $(f(a)+f(n), f(a+1)-f(a)) = 1$.

Да допуснем противното на $f(a+1) - f(a) = \pm 1$

p – прост делител на числото $f(a+1) - f(a)$.

$n = p^b - a \implies$

$$f(a) + f(n) | (n+a)^k = p^{bk},$$

$$\implies p | f(a) + f(n)$$

противоречие с полученото по-горе $(f(a)+f(n), f(a+1)-f(a)) = 1$.

Задача 4.

$f(a+1)-f(a)=\pm 1 \implies f(a+1)-f(a)$ е винаги 1 или винаги -1 (защото смяната на знака на някое място противоречи на инективността на f).

Но винаги $f(a+1)-f(a)=-1$ е невъзможно, защото f приема само естествени стойности.

Следователно $f(a+1)-f(a)=1$ за всяко естествено a.

Ако $f(1)=1+c$ за някое цяло неотрицателно c, то очевидна индукция дава $f(n)=n+c$ за всяко естествено n.

Да допуснем, че $c \neq 0$ и да изберем просто число $p>2c$. Тогава

$$p+2c=f(1)+f(p-1)|p^k,$$

което е невъзможно.

Следователно $c=0$ и $f(n)=n$, като очевидно тази функция е решение на задачата.

Задача 5.

Задача 5. (RMM 2011) За естествено число n означаваме с $\Omega(n)$ броят на простите делители на n, считани с кратностите им. Нека $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (например $\lambda(12) = \lambda(2^2.3^1) = (-1)^{2+1} = -1$). Да се докажат следните две твърдения:

а) Съществуват безбройно много естествени числа n, за които $\lambda(n) = \lambda(n+1) = 1$;

б) Съществуват безбройно много естествени числа n, за които $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

Задача 5.

а,б) Нека $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Очевидно съществуват безбройно много естествени числа n, за които $\lambda(2n+1) = \varepsilon$ (просто да вземем $2n+1$ като произведение на подходящ брой нечетни прости числа).

Ако $\lambda(2n) = \varepsilon$ или $\lambda(2n+2) = \varepsilon$, съответната двойки измежду $(2n, 2n+1)$ и $(2n+1, 2n+2)$ върши работа.

Ако пък $\lambda(2n) = \lambda(2n+2) = -\varepsilon$, то $\lambda(n) = \lambda(n+1) = \varepsilon$.

Всъщност доказахме, че за всяко такова n, поне една от двойките $(n, n+1)$, $(2n, 2n+1)$ и $(2n+1, 2n+2)$ върши работа за избраното ε.