Подготовка за МОМ 2019

Задача 1. (Китай 2008) Да се намерят всички тройки (p, q, n), за които

$$q^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{p^n}, \quad p^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{q^n},$$

където p и q са нечетни прости числа, а $n > 1$ е естествено число.

Решение. Очевидно тройката $(3, 3, n)$ е решение за всяко естествено $n > 1$. Да допуснем, че (p, q, n) е друго решение. Тогава $p \neq 3$, $p \neq 3$, $q \neq 3$ и можем без ограничение на общността да считаме, че $q > p \geq 5$.

Ако $n = 2$, то $q^2|(p^4 - 3^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + 3^2)$. Лесно се вижда, че q не може да дели едновременно $p^2 - q^2$ и $p^2 + 3^2$ и следователно q^2 дели точно едно от тях. Но $p^2 - 3^2 < p^2 < q^2$ и $\frac{p^2+3^2}{2} < p^2 < q^2$, противоречие. Следователно $n = 2$ не дава нови решения.

Да допуснем, че $n \geq 4$. От условията $p^n|q^{n+2} - 3^{n+2}$ и $q^n|p^{n+2} - 3^{n+2}$ следва съответно, че $p^n|p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2}$ и $q^n|p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2}$. Тогава поради $p \neq q$ заключаваме, че $p^n q^n|p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2} < 2q^{n+2}$, откъдето $p^n < 2q^2$. От друга страна, от $q^n|p^{n+2} - 3^{n+2} < p^{n+2}$ следва оценката $q < p^{1+\frac{2}{n}}$. Сега имаме

$$p^n < 2q^2 < 2p^{2+\frac{4}{n}} < p^{3+\frac{4}{n}},$$

т.е. $n < 3 + \frac{4}{n}$, което противоречи на $n \geq 4$. Следователно и $n \geq 4$ не дава нови решения.

Остава да разгледаме случая $n = 3$. Имаме $p^3|q^5 - 3^5$ и $q^3|p^5 - 3^5$. Тъй като $p = 5$ не дава решение (проверете!), можем да считаме, че $q > p > 5$.

От $p|q^5 - 3^5$ и $p|q^{p-1} - 3^{p-1}$ (последното поради малката теорема на Ферма) следва, че $p|q^d - 3^d$, където $d = (5, p - 1)$. Имаме две възможности.

Случай 1. $d = 1$. Тогава $p|q - 3$, т.е. $q \equiv 3 \pmod p$. Ако p^3 не дели $q - 3$, то p дели $\frac{q^5-3^5}{q-3}$, т.е.

$$0 \equiv \frac{q^5 - 3^5}{q - 3} = q^4 + 3q^3 + 9q^2 + 27q + 81 \equiv 5.3^4 \pmod p,$$

противоречие. Ако пък p^3 дели $q - 3$, то

$$q^3 < p^5 - 3^5 < p^6 < \frac{(q-3)^2}{4} < \frac{q^2}{4},$$

което е невъзможно.

Случай 2. $d = 5$. Аналогично получаваме и $(5, q - 1) = 5$, т.е. $p \equiv q \equiv 1 \pmod 5$. Тогава $p \geq 11$ и $q \geq 31$.

Тъй като q не дели $p-3$, имаме $q^3|\frac{p^5-3^5}{p-3}$. Следователно $q^3 < p^4+3p^3+9p^2+27p+81 < \frac{p^4}{1-\frac{3}{p}} \leq \frac{11p^4}{8}$. Тогава $1 < \frac{p^5+q^5-3^5}{p^3q^3} < \frac{p^2}{q^3} + \frac{q^2}{p^3} < \frac{1}{q} + \sqrt[4]{\frac{11^3}{31.8^3}} < 1$, противоречие.

Окончателно, решенията на задачата са само тройките $(3, 3, n)$, където $n > 1$ е естествено число.

Задача 2. (Китай 2010) Да се намерят всички двойки прости числа (p, q), за които pq дели $5^p + 5^q$.

Решение. Ако някое от числата p и q е равно на 2, например $p = 2$, то $q|5^q + 5^2$ и $q|5^q - 5$, откъдето $q|5^2 + 5 = 30$, т.е. $q = 2, 3$ или 5. С непосредствена проверка се вижда, че само $q = 3$ и $q = 5$ дават решение на задачата. Аналогично, ако някое от числата p и q е равно на 5, например $p = 5$, то $q|5^5 + 5 = 3130$, т.е. $q = 2, 5$ или 313, като нови решения идват от $q = 5$ и $q = 313$.

Нека $(pq, 10) = 1$. Да означим $p-1 = 2^k(2r-1)$ и $q-1 = 2^\ell(2s-1)$, където k, r, ℓ и s са естествени числа. Без ограничение на общността можем да считаме, че $k \leq \ell$.

От условието следва, че $p|5^{p-1}+5^{q-1}$. Оттук и от малката теорема на Ферма получаваме $5^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$, откъдето $5^{(q-1)(2r-1)} \equiv -1 \pmod{p}$. От друга страна, от сравнението $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, повдигнато на квадрат $\ell - k$ пъти и след това подвигнато на степен $2s-1$, дава $5^{(q-1)(2r-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, противоречие.

Окончателно, всички решения на задачата са двойките $(2,3)$, $(3,2)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(5,5)$, $(5,313)$ и $(313,5)$.

Задача 3. (Китай 2011) Да се докаже, че за всеки две естествени числа m и n съществуват безбройно много взаимно прости естествени числа a и b, за които $a+b$ дели $am^a + bn^b$.

Решение. Ако $m = n = 1$ условието е изпълнено за всеки две взаимно прости естествени числа a и b. При $mn \geq 2$ тъй като

$$n^a(am^a + bn^b) = (a+b)n^{a+b} + a((mn)^a - n^{a+b}),$$

е достатъчно да докажем, че съществуват безбройно много двойки взаимно прости a и b, за които $a+b$ дели $(mn)^a - n^{a+b}$ и $(a+b, n) = 1$.

Да приемем, че $p = a+b$ е просто число. Трябва да докажем, че съществуват безбройно много двойки (p, a), където p е просто число и $1 \leq a \leq p-1$, за които p дели $(mn)^a - n^p$.

От теоремата на Ферма имаме, че ако $a_1 \equiv a_2 \pmod{p-1}$, $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1$, то $(MN)^{a_1} \equiv (mn)^{a_2} \pmod{p}$.

Следователно е достатъчно да докажем, че съществуват безбройно много прости числа p и естествени числа a, за които p дели $(mn)^a - n$.

Да допуснем, че съществуват само краен брой прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_r$, които делят числата от вида $(mn)^a - n$. Тогава

$$(mn)^2 - n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, \tag{1}$$

където α_i са неотрицателни цели числа. Също така, за $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}(p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_r - 1) + 2$ имаме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}, \tag{2}$$

където β_i са неотрицателни цели числа. Ако p_i дели n, то от (2) и $a \geq 2$ следва, че $p_i^{\beta_i}$ дели n и следователно $p_i^{\beta_i}$ дели $(mn)^2 - n$. Сега от (1) следва, че $\beta_i \leq \alpha_i$.

Ако p_i не дели n, то p_i не дели и m. Тогава $(p_i^{\alpha_i+1}, mn) = 1$ и понеже $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})$ е делител на $a-2$, от теоремата на Ойлер следва, че

$$(mn)^a - n \equiv (mn)^2 - n \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}.$$

Тъй като $p_i^{\alpha_i+1}$ не дели $(mn)^2 - n$, горното сравнение означава, че $p_i^{\alpha_i+1}$ не дели $(mn)^a - n$. Следователно $\beta_i \leq \alpha_i$, откъдето намираме

$$(mn)^2 - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r} \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = (mn)^2 - n.$$

Горното неравенство е противоречие с $a > 2$. Следователно съществуват безбройно много прости числа p и естествени числа a, за които p дели $(mn)^a - n$.

Задача 4. (ЕМТ2007) Нека p и q са прости числа и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата от цели числа, дефинирана с равенствата:

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ и } a_{n+2} = pa_{n+1} - qa_n$$

при $n \geq 0$. Да се намерят p и q, ако съществува k такова, че $a_{3k} = -3$.

Решение. Нека p и q са нечетни прости числа. От рекурентната зависимост следва, че $a_2 = p$ и $a_3 = p^2 - q$. Следователно a_0 и a_3 са четни числа. Тъй като

$$a_{3k+3} = pa_{3k+2} - qa_{3k+1} = p(pa_{3k+1} - qa_{3k}) - qa_{3k+1} = (p^2 - q)a_{3k+1} - pqa_{3k}$$

и $p^2 - q$ е четно число, по индукция следва, че a_{3k} е четно число за всяко $k \geq 0$, противоречие с условието. Да предположим сега, че $q = 2$. Тогава $p \neq 2$, защото в противен случай всички числа a_n, $n \geq 2$ са четни. Нека $p \geq 3$. Ще докажем, че в този случай $a_n > 0$ при $n \geq 1$, което отново е противоречие.

По индукция ще докажем, че $a_{n+1} > a_n \geq 0$ за $n \geq 0$. За $n = 0$ твърдението е очевидно. Да допуснем, че твърдението е вярно за $n = k$, т.е. $a_{k+1} > a_k \geq 0$. Тогава

$$a_{k+2} = pa_{k+1} - a_k = (p-2)a_{k+1} + 2(a_{k+1} - a_k) > a_{k+1} > 0$$

и значи $a_{k+2} > a_{k+1} > 0$.

Остава да разгледаме случая $p = 2$, $q > 2$. От рекурентната връзка следва, че при $n \geq 0$ имаме $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} \pmod q$ и по индукция заключаваме, че $a_{n+1} \equiv 2^n \pmod q$. Да предположим, че $a_{3k} = -3$ за някое $k \geq 1$. Тогава $-3 = a_{3k} \equiv 2^{3k-1} \pmod q$. От друга страна пак от рекурентната връзка следва, че $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} - a_n \pmod{q-1}$. Следователно

$$a_{n+2} - a_{n+1} \equiv a_{n+1} - a_n \equiv \cdots \equiv a_1 - a_0 = 1 \pmod{q-1}$$

и значи $a_{n+1} \equiv n + 1 \pmod{q-1}$ за $n \geq 0$. Тогава $-3 = a_{3k} \equiv 3k \pmod{q-1}$ и от малката теорема на Ферма следва, че $2^{3k+3} \equiv 1 \pmod q$. Тогава $1 \equiv 2^{3k+3} \equiv 16.2^{3k-1} \equiv -48 \pmod q$, т.е. $q = 7$. В този случай $a_3 = 2^2 - 7 = -3$ и следователно търсените прости числа са $p = 2$ и $q = 7$.

Задача 5. (Китай 2010) Дадени са две по две различни естествени числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 и b_3, за които

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \text{ дели } (n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n$$

за всяко естествено число n. Да се докаже, че съществува естествено число k, за което $b_i = ka_i$ за всяко $i = 1, 2, 3$.

Решение. Нека r е произволно естествено число и p е просто число, за което

$$p > (a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r + b_2^r + b_3^r).$$

Тъй като p е просто, то $(p, a_1^r + a_2^r + a_3^r) = 1$. Освен това p е взаимнопросто с $p - 1$. От Китайската теорема за остатъците следва, че съществува естествено число n, за което

$$n \equiv r \pmod{p-1},\ n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0 \pmod p.$$

От тези сравнения и малката теорема на Ферма намираме

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \equiv n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0 \pmod p.$$

От условието на задачата сега намираме

$$(n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n \equiv 0 \pmod p$$

и както по-горе получаваме

$$n(b_1^r + b_2^r + b_3^r) + b_1^r - b_3^r \equiv 0 \pmod p.$$

След елиминиране на n от получените сравнения, намираме

$$(a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) \equiv (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r) \pmod p.$$

Оттук и от избора на p следва, че сравнението всъщност е равенство, т.е.

$$\begin{aligned} & (a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) = (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r) \\ \iff \quad & (a_2b_1)^r + 2(a_3b_1)^r + (a_3b_2)^r = (a_1b_2)^r + 2(a_1b_3)^r + (a_2b_3)^r, \end{aligned}$$

като последното равенство е изпълнено за всяко естествено число r.

Лема. Дадени са такива реални числа $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s$, $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_s$, че за всяко естествено число r е изпълнено

$$x_1^r + x_2^r + \dots + x_s^r = y_1^r + y_2^r + \dots + y_s^r.$$

Тогава $x_i = y_i$ за $i = 1, 2, \dots, s$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по s. При $s = 1$ избираме $r = 1$ и получаваме $x_1 = y_1$. Да допуснем, че твърдението е вярно за $s = t$. При $s = t + 1$ без ограничение приемаме, че $x_{t+1} < y_{t+1}$. Тогава

$$\left(\frac{x_1}{y_{t+1}}\right)^r + \dots + \left(\frac{x_{t+1}}{y_{t+1}}\right)^r = \left(\frac{y_1}{y_{t+1}}\right)^r + \left(\frac{y_t}{y_{t+1}}\right)^r + 1 \geq 1.$$

Тъй като $0 < \dfrac{x_i}{y_{t+1}} < 1$ за $1 \leq i \leq t + 1$ при $r \to \infty$ горното равенство дава $0 \geq 1$, противоречие. Следователно $x_{t+1} = y_{t+1}$, с което доказателството на лемата е завършено.

От лемата следва (за $s = 4$), че числата a_2b_1, a_3b_1 и a_3b_2 са равни в някакъв ред на a_1b_2, a_1b_3 и a_2b_3. Тъй като шестте числа са две по две различни, не е трудно да се установи, че са налице точно две възможности: $a_2b_1 = a_3b_2 = a_1b_3$ и $a_3b_1 = a_1b_2 = a_2b_3$ или $a_2b_1 = a_1b_2$, $a_3b_1 = a_1b_3$ и $a_3b_2 = a_2b_3$.

Случай 1. Ако $a_2b_1 = a_3b_2 = a_1b_3$ и $a_3b_1 = a_1b_2 = a_2b_3$, то

$$\frac{a_2b_1}{a_3b_1} = \frac{a_3b_2}{a_1b_2} = \frac{a_1b_3}{a_2b_3},$$

откъдето $\dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{a_3}{a_1} = \dfrac{a_1}{a_2} = t$. Тогава $t^2 = t$, т.е. $t = 1$, и $a_1 = a_2$, противоречие.

Случай 2. Ако $a_2b_1 = a_1b_2$, $a_3b_1 = a_1b_3$ и $a_3b_2 = a_2b_3$, то $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$ и нека $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{k}{l}, (k, l) = 1$. Получаваме $b_i = \dfrac{k}{l}a_i$, за $i = 1, 2, 3$. От $2b_1 + b_2 = \dfrac{k}{l}(2a_1 + a_2)$ и условието на задачата (за $n = 1$) имаме $2a_1 + a_2$ дели $2b_1 + b_2$, т. е. $\dfrac{k}{l}$ е цяло число. Следователно $l = 1$ и $b_i = ka_i$, за $i = 1, 2, 3$.