Целозначни функции и делимост

П. Бойваленков
Институт по математика и информатика, БАН

Семинар по олимпийска математика
Созопол, 3-10 септември 2017

Задача 1.

Задача 1. (МОМ 2010) Да се намерят всички функции $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такива, че

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

е точен квадрат за произволни $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 1.

Решение. Първо ще докажем, че f е инекция. Да допуснем, че $g(m_1) = g(m_2)$ за някои естествени m_1 и m_2.

$p > g(m_1)$ – просто, $n = p - g(m_1)$.
$\Longrightarrow$ $(g(m_1) + n)(m_1 + g(n)) = p(m_1 + g(n))$,
$\Longrightarrow$ $(g(m_2) + n)(m_2 + g(n)) = p(m_2 + g(n))$
са точни квадрати.

$\Longrightarrow$ $m_1 + g(n)$, $m_2 + g(n)$ се делят на p
$\Longrightarrow$ $m_1 - m_2$ се дели на p, противоречие при $m_1 \neq m_2$

Задача 1.

Ще докажем $|g(n+1)-g(n)| = 1\ \forall n$
Нека $|g(n+1)-g(n)| > 1$ и p е прост делител на $|g(n+1)-g(n)|$

$$g(n+1) = p^a A - t \ \text{ и } \ g(n) = p^b B - t,$$

t, a, b, A, B – естествени числа, $(A,p) = (B,p) = 1$

$$m = \begin{cases} p+t & \text{ако } a > 1,\ b > 1 \\ p^{c+1}+t & \text{ако } \{a,b\} = \{1,c\},\ c \text{ е нечетно} \\ Cp+t & \text{ако } \{a,b\} = \{1,c\},\ c \text{ е четно} \end{cases}$$

$C + A$ не се дели на p (при $a = 1$), $C + B$ не се дели на p (при $b = 1$).
При тази конструкция за всяко от числата $m + g(n)$ и $m + g(n+1)$ максималната степен на p, която го дели, е нечетна
$\Longrightarrow$ $g(m) + n$ и $g(m) + n + 1$ се делят на p
$\Longrightarrow$ $p|(g(m) + n + 1) - (g(m) + n) = 1$, противоречие
$\Longrightarrow$ $g(n+1) - g(n) = 1$ (използваме и инективността)

Задача 1.

$g(1) = t \implies g(n) = n + t - 1$ по индукция

Окончателно $g(n) = n + c$ за някаква константа $c \in \mathbb{N}$

Директно се проверява, че тази функция удовлетворява условието на задачата

Задача 2.

Задача 2. (Иран 2011) Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция, за която

$$af(a) + bf(b) + 2ab$$

е точен квадрат за произволни $a, b \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че $f(a) = a$ за всяко $a \in \mathbb{N}$.

Задача 2.

Решение. $a = b = p$ – нечетно просто $\implies$ $2p(f(p) + p)$ е точен квадрат
Освен това – $p|f(p) \implies p \leq f(p)$.

Ще докажем, че $af(a)$ е точен квадрат за всяко $a \in \mathbb{N}$
Противното $\implies$ $\exists p$ – просто, за което $p^{2k-1} \| af(a)$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $af(a) = p^{2k-1}s$, където $(s, p) = 1$

$b = p^{2k} \implies x = p^{2k-1}s + p^{2k}(f(b) + 2a)$ е точен квадрат, противоречие, защото $p^{2k-1} \| x$.

Задача 2.

$p > f(1)$ – (голямо) нечетно просто число

$a = p$, $b = 1$ получаваме, че $\implies y = pf(p) + f(1) + 2p$ е точен квадрат

$y > pf(p) = (\sqrt{pf(p)})^2$ – очевидно

$y < (\sqrt{pf(p)} + 2)^2 \iff f(1) + 2p < 4\sqrt{pf(p)} + 4$

Последното следва от $f(1) < p$ и $p \leq f(p)$

$\implies y = (\sqrt{pf(p)} + 1)^2$

$$\implies f(1) + 2p = 2\sqrt{pf(p)} + 1. \tag{1}$$

Задача 2.

$pf(p)$ – точен квадрат $\Longrightarrow$ $f(p) = t^2 p$, $t \in \mathbb{N}$

Ако $t \geq 2$, то от $p > f(1)$ и от (1) следва, че

$$3p > f(1) + 2p = 2\sqrt{pf(p)} + 1 = 2tp + 1 \geq 4p + 1,$$

противоречие.

$\Longrightarrow$ $t = 1$ и $f(p) = p$ за всяко нечетно просто число $p > f(1)$

Нещо повече, сега от (1) виждаме, че $f(1) = 1$ и значи $f(p) = p$ за всяко нечетно просто число p

Задача 2.

Да допуснем сега, че за някое $a \in \mathbb{N}$ имаме $f(a) \neq a$

$b = p$ – нечетно просто $\Longrightarrow$ $z = af(a) + p^2 + 2ap$ е точен квадрат, различен от $(a+p)^2$ поради допускането

$\Longrightarrow$ $|z - (a+p)^2| \geq 2(a+p) - 1$ (това е минималната разлика между точния квадрат $(a+p)^2$ и най-близкия до него друг точен квадрат)

Но $z - (a+p)^2 = af(a) - a^2$

$$\Longrightarrow |af(a) - a^2| \geq 2(a+p) - 1,$$

не може да бъде вярно за фиксирано a и за всяко просто число p

Окончателно $f(a) = a$ за всяко $a \in \mathbb{N}$.

Задача 3.

Задача 3. (БОМ 2017) Да се намерят всички функциии $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които

$$n + f(m) | f(n) + nf(m)$$

за всеки две естествени числа m и n.

Задача 3.

Решение. $n+f(m)|f(n)+nf(m)$, $n+f(m)|n^2+nf(m)$

$$\Longrightarrow \; n+f(m)|f(n)-n^2$$

за всяко $m \Longrightarrow f(n)=n^2$ е решение

Да допуснем, че $\exists n=n_1$, за което $f(n_1)\neq n_1^2$

$$\Longrightarrow \; 1\leq f(m)\leq |f(n_1)-n_1^2|-n_1$$

$\Longrightarrow f$ е ограничена

$c\in\mathbb{N}$ – такова, че $|f(n)-f(m)^2|<c$ за всички естествени m и n

Задача 3.

$$n + f(m) | n^2 - f(m)^2 + f(n) - n^2 = f(n) - f(m)^2.$$

$n > c$ (от последното и от условието за ограниченост)

$$\Longrightarrow \; n + f(m) || f(n) - f(m)^2 | < c < n + f(m)$$

$\Longrightarrow \; f(n) - f(m)^2 = 0$ за всяко $m \in \mathbb{N}$ и всяко естествено $n > c$

$\Longrightarrow \; f = 1$, което наистина е решение

Окончателно, решенията са $f(n) = n^2$ и $f \equiv 1$

Задача 4.

Задача 4. (Шортлист МОМ 2007) Да се намерят всички сюрективни функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ със следното свойство:

за всички $m, n \in \mathbb{N}$ и за всяко просто число p числото $f(m+n)$ се дели на p тогава и само тогава, когато числото $f(m) + f(n)$ се дели на p.

Задача 4.

Решение. Ако $f(1)$ има прост делител p, то $f(1)+f(1)$ се дели на p, откъдето $f(1+1)=f(2)$ се дели на p и т.н., до заключението, че p дели всички стойности на $f(n)$, което противоречи на сюрективността. Следователно $f(1)=1$.

За фиксирано просто p да означим с $a(p)$ най-малкото естествено число m, за което $f(m)$ се дели на p (от сюрективността следва, че тази дефиниция е коректна). Очевидно $a(p)>1$ и от $p|f(a(p))$ и условието следва, че $p|f(n)$, когато $a(p)|n$. Вярно е и обратното, т.е. ако $p|f(n)$, то $a(p)|n$. Действително, ако $n=a(p)q+r$ и $0<r<a(p)$, то $f(a(p)q)+f(r)$ се дели на p, откъдето $p|f(r)$, а това противоречи на дефиницията на $a(p)$.

Задача 4.

Да допуснем, че за някое $n \in \mathbb{N}$ числото $f(n+1) - f(n)$ има прост делител p. От сюрективността следва, че съществува $k \in \mathbb{N}$, за което $f(n) + f(k)$ се дели на p. Тогава от $p | f(n+1) + f(k) + f(n) - f(n+1)$ следва, че $p | f(n+1) + f(k)$. Сега от условието следва, че p дели едновременно $f(n+k)$ и $f(n+1+k)$. Но тогава $a(p) | (n+1+k) - (n+k) = 1$, противоречие. Следователно $|f(n+1) - f(n)| = 1$ за всяко естествено n.

Задача 4.

От горното следва, че $f(2) = 2$ и остава да докажем с индукция по n, че $f(n) = n$. Нека $f(k) = k$ за всяко $k \leq n$ и да допуснем, че $f(n+1) = n-1$. От условието следва, че числата $f(n)+f(1) = n+1$ и $f(n+1) = n-1$ имат едни и същи прости делители, което веднага дава, че те са степени на 2, оттам $n = 3$ и $f(4) = 2$. Но тогава $|f(5) - 2| = 1$ от една страна и, от друга, $f(5)$ се дели на 5, защото $f(2) + f(3) = 2 + 3 = 5$. Полученото противоречие показва, че $f(n+1) = n+1$ и индукцията е завършена.

Задача 5.

Задача 5. (БОМ 2012) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които са в сила двете условия:
(i) $f(n!) = f(n)!$ за всяко естествено число n,
(ii) $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за произволни различни естествени числа m и n.

Задача 5.

Решение. Да отбележим, че от $f(n_0) = n_0$ за някое $n_0 \geq 3$ следва $f(n_k) = n_k$ за всяко цяло $k \geq 0$, където $n_k = n_{k-1}!$. От друга страна,

$$m - n_k | f(m) - f(n_k) = f(m) - n_k = f(m) - m + m - n_k,$$

откъдето $m - n_k | f(m) - m$. Следователно $f(m) - m$ има безбройно много делители, т.е. $f(m) = m$ за всяко m.

Задача 5.

От $f(1) = f(1!) = f(1)!$ и $f(2) = f(2!) = f(2)!$ следва, че $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Оттук и от $4 = 3! - 2 | f(3!) - f(2) = f(3)! - f(2)$ следва, че $f(3) \leq 3$.

Ако $f(3) = 3$, то $f(m) = m$ за всяко m.

Нека $f(3) \in \{1, 2\}$ и $n > 3$ е произволно. Тогава от $n! - 3 | f(n!) - f(3) = f(n)! - f(3)$ следва, че $f(n)!$ не се дели на 3, т.е. $f(n) \in \{1, 2\}$.

Задача 5.

Ако f не е константа, съществуват естествени числа m и n, за които $f(n) = 1$ и $f(m) = 2$. Тогава за $k = 2 + \max\{m, n\}$ от $k - m | f(k) - f(m) \in \{-1, 0, 1\}$ следва, че $f(k) = f(m) = 2$ и аналогично $f(k) = 1$, противоречие.

Окончателно, всички решения на задачата са $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.