Лифтинг

Задача 1. (Япония 2010, 2) Нека k е естествено число и m е цяло нечетно число. Да се докаже, че съществува естествено число n, за което 2^k дели $n^n - m$.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по k. При $k = 1$ можем да вземем n нечетно. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е такова, че $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^k}$. Очевидно n_0 е нечетно.

Ако $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^{k+1}}$, няма какво да доказваме. В противен случай ще докажем, че $n = n_0+2^k$ върши работа.

Имаме $n_0^{n_0} - m = d2^k$, където d е нечетно и следователно $n_0^{n_0} - m - 2^k = (d-1)2^k$ се дели на 2^{k+1}. От теоремата на Ойлер следва, че $n^{2^k} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. Тогава

$$\begin{aligned} n^n &= n^{n_0+2^k} = n^{n_0}n^{2^k} \equiv n^{n_0} \equiv (n_0+2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0-1}2^k \\ &\equiv m + 2^k + n_0^{n_0}2^k = m + (n_0^{n_0}+1)2^k \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Следователно $n^n - m \equiv (n_0^{n_0}+1)2^k \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$.

Задача 2. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се докаже, че съществува естествено число m, за което $3^n || m^3 + 17$.

Решение. При $n = 2$ имаме $m = 1$. Нека твърдението е вярно за някое $n \geq 2$, т.е. имаме $m \in \mathbb{N}$, за което $m^3 + 17 = 3^n(3q + r)$, където $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, 2\}$. Да отбележим, че m не се дели на 3 и значи $m^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Ще докажем, че съществува $s \in \{1, 2\}$, за което $(m + s3^{n-1})^3 + 17 \equiv 0 \pmod{3^{n+1}}$. Действително, имаме

$$(m + s3^{n-1})^3 + 17 = m^3 + 17 + 3^n m^2 s + 3^{2n-1}ms^2 + 3^{3n-3}s^3 \equiv 3^n(r + s) \pmod{3^{n+1}}$$

и следователно трябва да изберем $s = 3 - r$.

Нека $x_1 = m + 3^{n-1}(3 - r)$ и $x_2 = x_1 + 3^n == m + 3^{n-1}(6 - r)$. Тогава от горното следва, че 3^{n+1} дели $x_1^3 + 17$ и $x_2^3 + 17$. Ще докажем, че поне едно от числата $x_1^3 + 17$ и $x_2^3 + 17$ не се дели на 3^{n+2}, откъдето ще следва исканото. Да допуснем за момент противното. Тогава имаме последователно

$$0 \equiv x_2^3 + 17 = (x_1 + 3^n)^3 + 17 = x_1^3 + 17 + 3^{n+1}x_1^2 + 3^{2n+1}x_1 + 3^{3n} \equiv 3^{n+1} \pmod{3^{n+2}},$$

противоречие (използвахме $x_1^2 \equiv 1 \pmod 3$).

Задача 3. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и без кратни корени. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществуват безбройно много прости числа p, за които $\operatorname{ord}_p(f(x)) = k$ за някое цяло x. (С $\operatorname{ord}_p(n)$ означаваме максималната степен на p, която дели n.)

Решение. Нека $f(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0$. Първо ще докажем, че съществуват безбройно много прости числа, които делят $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}$. Да допуснем противното и нека $p_1, p_2, \ldots, p_s$ са всички прости числа, които делят $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}$. Тогава числото

$$f(b_0tp_1p_2\ldots p_s) = b_0(b_ktb_0^{k-1}(p_1p_2\ldots p_s)^k + \cdots + b_1tp_1p_2\ldots p_s + 1) = A(t)p_1p_2\ldots p_s + 1,$$

където $A(t)$ е цяло число, $A(t) \neq 0$ за някое цяло t, се дели на просто число, различно от $p_1, p_2, \ldots, p_s$, противоречие. Да означим полученото безкрайно множество с $P(f)$.

От условието следва, че $(f, f') = \text{const} \neq 0$ (тук f' е производната на f). Тогава съществуват полиноми с цели коефициенти g и h, такива, че $f(x)g(x) + f'(x)h(x) = a$, $a \neq 0$ е цяло число.

Достатъчно е да докажем, че за всяко $p \in P(f)$ с $p > |a|$ съществува цяло число x_0, такова, че $\mathrm{ord}_p(f(x_0)) = k$. От $p > |a|$ и $p|f(x_0)$ следва, че $(p, f'(x_0)) = 1$.

Ако $p^\alpha | f(x_0)$, ще докажем, че съществува цяло x_1, за което $p^{\alpha+1}|f(x_1)$. За $x_1 = tp^\alpha + x_0$ и $s \geq 1$ имаме

$$x_1^s = (tp^\alpha + x_0)^s \equiv stp^\alpha x_0^{s-1} + x_0^s \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

От тези сравнения следва, че $f(x_1) = f(tp^\alpha + x_0) \equiv tp^\alpha f'(x_0) + f(x_0) \pmod{p^{\alpha+1}}$. От $(p, f'(x_0)) = 1$ следва, че съществува цяло t, за което $tf'(x_0) + \frac{f(x_0)}{p^\alpha} \equiv 0 \pmod{p}$. За такова t имаме $p^{\alpha+1}|f(x_1)$.

Вече можем да считаме, че $p^k|f(x_0)$. Ако имаме и $p^{k+1}|f(x_0)$, за $x_2 = x_0 + p^k$ както по-горе имаме

$$f(x_2) = f(x_0 + p^k) \equiv p^k f'(x_0) + f(x_0) \pmod{p^{k+1}}$$

и очевидно $\mathrm{ord}_p(f(x_2)) = k$.

Задача 4. Дадени са естествени числа $m \geq 3$ и $s \geq 2$, като s не се дели на $2^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}$. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществува естествено число n, такова, че числото $n2^k - 2^m + 1$ е точна s-та степен на естествено число.

Решение. Достатъчно е да покажем, че за всяко естествено k сравнението $x^s \equiv 1 - 2^m \pmod{2^k}$ има решение x_k. При $k \leq m$ това е очевидно – можем да вземем $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$.

Ако x_k е решение при някое $k \geq m$, ще конструираме решение x_{k+1} за $k+1$. Ако $x_k^s \equiv 1 - 2^m \pmod{2^{k+1}}$, полагаме $x_{k+1} = x_k$. Ако $x_k^s \not\equiv 1 - 2^m \pmod{2^{k+1}}$, то $x_k^s \equiv 1 - 2^m + 2^k \pmod{2^{k+1}}$.

Нека $s = 2^a b$, където b е нечетно число, а $a \leq \left[\frac{m+1}{2}\right] - 1$, т.е. $a + 1 \leq \frac{m+1}{2} \iff 2a + 1 \leq m$. Тогава полагаме $x_{k+1} = x_k + 2^{k-a}$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} x_{k+1}^s &= (x_k + 2^{k-a})^s \equiv x_k^s + s x_k^{s-1} 2^{k-a} \\ &\equiv 1 - 2^m + 2^k(1 + b x_k^{s-1}) \equiv 1 - 2^m \pmod{2^{k+1}} \end{aligned}$$

(използвахме, че $2(k-a) \geq k+1 \iff k \geq 2a+1$, което следва от $k \geq m \geq 2a+1$ и че числата b и x_k са нечетни).