

Тема на седмицата (4-10 май 2020 г.)

Задача 1. Нека a_1, a_2, \dots е такава редица от различни естествени числа, че $a_n \leq 4,99n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че сборът на цифрите на безбройно много членове на редицата не се дели на 5.

Задача 2. Да се намерят всички инективни функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такива, че

$$2f(f(n)) \leq n + f(n) \quad \text{за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Задача 3. Квадрат $ABCD$ е разположен във вътрешността на окръжност k . Окръжност σ се допира вътрешно до k в точка A_1 и до противоположните лъчи на AB^{\rightarrow} и AD^{\rightarrow} . Аналогично се дефинират точките B_1 , C_1 и D_1 . Да се докаже, че правите AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 се пресичат в една точка.