Тема на седмицата (13-19 април 2020 г.)
Решения

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC > AB$. Нека D е точка от страната BC, за която $2\angle DAC = \angle ABC - \angle ACB$. Описаната около $\triangle ACD$ окръжност пресича за втори път страната AB в точка E, а описаната около $\triangle ABD$ окръжност пресича за втори път страната AC в точка F. Ъглополовящата на $\angle BDE$ пресича страната AB в точка P, а ъглополовящата на $\angle CDF$ пресича страната AC в точка Q. Да се докаже, че правите PQ и AB са перпендикулярни.

Решение. Първи начин. Имаме последователно

$$\begin{aligned}\angle PDQ &= 180^\circ - \angle BDP - \angle CDQ = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BDE - \frac{1}{2}\angle CDF\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle BAC = 180^\circ - \angle BAC.\end{aligned}$$

Следователно точките A, P, D и Q лежат на една окръжност. Тогава

$$\begin{aligned}\angle APQ &= \angle ADQ = 180^\circ - \angle DAQ - \angle ACD - \angle CDQ\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) - \angle ACB - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ.\end{aligned}$$

Втори начин. От $\angle DFC = \angle DBE$ и $\angle DCF = \angle DEB$ следва, че $\triangle DFC \sim \triangle DBE$. Това означава, че съществува въртяща хомотетия h с център D, която изпраща $\triangle DFC$ в $\triangle DBE$. Имаме $h(Q) = P$, защото точките Q и P са съответни върху правите CF и EB. Тогава h изпраща $\triangle DQP$ в $\triangle DFB$ и имаме последователно

$$\begin{aligned}\angle(PQ, AB) &= \angle(PQ, BF) + \angle FBA = \angle(PD, BD) + (\angle ABC - \angle CBF)\\ &= \frac{1}{2}\angle EDB + \angle ABC - \angle DAC\\ &= \frac{1}{2}\angle BAC + \angle ABC - \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Задача 2. Нека P е неконстантен полином с цели коефициенти. Съществува ли функция $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ със следното свойство: броят на целите числа x, за които $T^{(n)}(x) = x$ е равен на $P(n)$ за всяко естествено число n? (С $T^{(n)}$ означаваме n-тата итерация на T.)

Решение. Отговор – Не! Да допуснем, че съществува функция T с исканото свойство. За всяко естествено число n нека

$$A(n) = \{x \in \mathbb{Z} : T^n(x) = x\}$$

$$B(n) = \{x \in \mathbb{Z} : T^n(x) = x; n \text{ е минималното с това свойство}\}.$$

Тогава имаме $P(n) = |A(n)|$ за всяко естествено число n и, в частност, всички множества $A(n)$ са крайни. Имаме още

$$A(n) = \cup_{d|n} B(d),$$

като множествата $B(d)$, $d|n$, са две по две непресичащи се. Тогава

$$|A(n)| = \sum_{d|n} |B(d)|.$$

Ще докажем, че $|B(d)|$ се дели на d. Да разгледаме насочен граф с върхове целите числа и насочено ребро от a към b точно когато $b = T(a)$. Имаме $x \in B(d)$ тогава и само тогава, когато x принадлежи на цикъл с дължина d в нашия граф. Броят на елементите в такъв цикъл е кратен на d, което означава, че d дели $|B(d)|$.

Нека $\deg(P) = m \geq 1$, $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ и p е произволно просто число. Имаме $P(1) = |A(1)| = |B(1)|$ и

$$P(p) = |A(p)| = |B(1)| + |B(p)| = |B(p)| + |A(1)| = |B(p)| + P(1).$$

Тъй като $p \mid |B(p)|$, заключаваме, че $p \mid P(p) - P(1)$, т.е. p дели $a_m(p^m - 1) + a_{m-1}(p^{m-1} - 1) + \cdots + a_1(p-1)$, откъдето очевидно следва, че $p \mid a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1$. Тъй като това е вярно за всяко просто число p, получаваме $a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 = 0$.

Нека сега p и q са две различни прости числа. Тогава

$$\begin{aligned} P(pq) &= |A(pq)| = |B(pq)| + |B(p)| + |B(q)| + |B(1)| \\ &= |B(pq)| + (|A(p)| - |B(1)|) + (|A(q)| - |B(1)|) + |A(1)| \\ &= |B(pq)| + |A(p)| + |A(q)| - |A(1)| = |B(pq)| + P(p) + P(q) - P(1). \end{aligned}$$

Тъй като $pq \mid |B(pq)|$, заключаваме, че pq дели $P(pq) - P(p) - P(q) + P(1)$. Оттук следва, че pq дели израза

$$a_m((pq)^m - p^m - q^m + 1) + \cdots + a_1(pq - p - q + 1) = a_m(p^m - 1)(q^m - 1) + \cdots + a_1(p-1)(q-1).$$

Отчитайки това и полученото по-горе $a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 = 0$, достигаме до

$$a_m q^m + \cdots + a_1 q \equiv 0 \pmod{p},$$

което трябва да е в сила за всяко просто число q.

С други думи, уравнението $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x = 0$ има за корен всяко $q \pmod{p}$ в полето $\mathbb{Z}_p$. Нека $p > m+1$ и (без ограничение на общността) поне един от коефициентите $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1$ не се дели на p. Съгласно теоремата на Дирихле за всеки остатък $i \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ можем да изберем просто число q_i, за което $q_i \equiv i \pmod{p}$, получавайки по този начин повече от m корена в $\mathbb{Z}_p$ на $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x = 0$. Полученото противоречие приключва доказателството.

Задача 3. Дадена е огърлица с 2020 мъниста, всяко от които е номерирано с цяло число. Сумата от всички номера е равна на 2019. Винаги ли е възможно огърлицата да се разкъса между две мъниста така, че в получения наниз (в една от посоките) мънистата да са подредени с номерата си $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ така, че да са изпълнени неравенствата

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq k - 1 \qquad \text{за} \quad k = 1, 2, \ldots, 2020?$$

Решение. Отговор – Да! Нека $2020 = n$ и

$$s_i = x_1 + \cdots + x_i - \frac{i(n-1)}{n},$$

като $s_n = s_0 = 0$. Тези числа образуват циклична редица, която при ротация на огърлицата се транслира с константа. Следователно, ако изберем x_j, за което s_j е максимално и разкъсаме огърлицата при x_j (т.е. преименуваме, правейки x_n това x_j). Сега $s_k \leq 0$ за всяко k, което означава, че

$$x_1 + \cdots + x_k \leq \frac{k(n-1)}{n}$$

и остава да съобразим, че лявата страна е цяло число, а цялата част на дясната страна е $k - 1$.