Тема на седмицата (4-10 май 2020 г.)
Решения

Задача 1. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е такава редица от различни естествени числа, че $a_n \leq 4,99n$ за всяко $n \in N$. Да се докаже, че сборът на цифрите на безбройно много членове на редицата не се дели на 5.

Решение. Да забележим, че за всяко естествено число k измежду числата $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ и $5k+4$ има точно едно, сумата от цифрите на което се дели на 5. Наистина, последните цифри на тези числа са 0,1,2,3,4 или 5,6,7,8,9 (като никъде нямаме пренос), което означава, че остатъците от сбора на цифрите при деление на 5 са 0,1,2,3,4 в някакъв ред. Следователно, ако $b_1 = 5, b_2 = 14, b_3 = 19, b_4 = 23, \ldots$ е растящата редица от естествени числа, сборът от цифрите на всяко от които се дели на 5, то

$$5n \leq b_n \leq 5n + 4.$$

Да допуснем, че редицата $a_1, a_2, \ldots$ съдържа краен брой членове, сборът от цифрите на всяко от които не се дели на 5. Това означава, че съществува N, за което сборът от цифрите на a_n при $n \geq N$ се дели на 5. Ако $a_N = b_k$, то можем да считаме, че $a_{N+t} = b_{k+t}$ (Защо?). Получаваме, че за всяко t е изпълнено:

$$4,99(N+t) \geq a_{N+t} = b_{k+t} \geq 5(k+t),$$

което води до $4,99N - 5k \geq 0,01t$. Последното равенство е невъзможно, защото N и k са дадени естествени числа, а t расте неограничено, противоречие.

Задача 2. Да се намерят всички инективни функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такива, че

$$2f(f(n)) \leq n + f(n) \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Да допуснем, че $f(n) > n$ за някое естествено число n. Тогава

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2} < f(n)$$

и по индукция получаваме

$$f^{(t+1)}(n) \leq \frac{f^{(t-1)}(n) + f^{(t)}(n)}{2} < f(n).$$

Следователно редицата $\{f^{(k)}(n)\}$ е ограничена редица от естествени числа, откъдето получаваме $f^{(p)}(n) = f^{(q)}(n)$ за някои $p < q$. Тъй като f е инективна, то $f^{(p-1)}(n) = f^{(q-1)}(n)$ и следователно $f^{(q-p)}(n) = n$. Оттук $f^{(q-p+1)}(n) = f(n)$, което е противоречие.

Доказахме, че $f(n) \leq n$ за всяко n. Тогава $f(1) \leq 1$, откъдето $f(1) = 1$. Ако $f(n) = n$ за $n = 1, 2, \ldots, k-1$, то $f(k) \leq k$ и инективността на функцията f означава, че $f(k) = k$.

Единствената функция, удовлетворяваща условието на задачата е $f(n) = n$.

Задача 3. Квадрат $ABCD$ е разположен във вътрешността на окръжност k. Окръжност σ се допира вътрешно до k в точка A_1 и до противоположните лъчи на $AB^{\to}$ и $AD^{\to}$. Аналогично се дефинират точките B_1, C_1 и D_1. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 се пресичат в една точка.

Решение. Да означим с ω вписаната в квадрата $ABCD$ окръжност. Нека H_1 е хомотетия с център A и отрицателен коефициент, която преобразува ω в σ, а H_2 е хомотетия с център A_1 и положителен коефициент, която преобразува σ в k. Произведението на коефициентите на двете хомотетии е отрицателно число и следователно не е равно на 1. Известно е, че в този случай композицията H на двете хомотетии е хомотетия с център върху правата A_1A. Хомотетията H има отрицателен коефициент и преобразува ω в k. Тъй като H е единствена, то AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 се пресичат в една точка и това е центърът на H.