Тема на седмицата (27 април – 3 май 2020 г.)
Решения

Задача 1. Нека $a \neq -1$ е реално число и $b = 1 + a + a^2$. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}\backslash\{-a, 1\} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f\left(\frac{x-b}{x+a}\right) + f\left(\frac{ax+b}{1-x}\right) \equiv x.$$

Решение. Нека $u(x) = \dfrac{x-b}{x+a}$ и $v(x) = \dfrac{ax+b}{1-x}$. Тъй като $a + b = (a+1)^2 > 0$, директно се проверява, че

$$u(v(x)) = v(u(x)) = \frac{(a+b)x}{a+b} = x.$$

Също така,

$$u(u(x)) = \frac{(1-b)x - b(1+a)}{(1+a)x + a^2 - b} = \frac{-a(1+a)x - b(1+a)}{(1+a)x - (1+a)} = v(x),$$

откъдето $u(u(u(x))) = x$ и $v(v(v(x))) = x$, а значи и $v(v(x)) = u(x)$. Замествайки във функционалното тъждество x веднъж с $u(x)$ и втори път с $v(x)$, получаваме

$$\begin{aligned} f(u(u(x))) + f(v(u(x))) = u(x) \quad &\Rightarrow \quad f(v(x)) + f(x) = u(x) \\ f(u(v(x))) + f(v(v(x))) = v(x) \quad &\Rightarrow \quad f(u(x)) + f(x) = v(x). \end{aligned}$$

Събирайки двете тъждества и отново използвайки условието $f(u(x)) + f(v(x)) = x$, заключаваме, че

$$f(x) = \frac{u(x) + v(x) - x}{2}.$$

Директно се проверява, че тази функция удовлетворява условието на задачата.

Задача 2. Ана избира 2020 точки в равнината в общо положение (т.е. никои три от точките не лежат на една права) и оцветява 1010 от тях в синьо, а останалите 1010 - в червено. Целта ѝ е Боб да не може да прекара права ℓ, от всяка страна на която да се намират по точно 505 сини и 505 червени точки. Може ли Ана да попречи на Боб?

Решение. Ана не може да попречи на Боб. Да означим с $R(\varphi)$ множеството от всички прави в равнината, чиито ъглов наклон е φ (считано в посока, обратна на часовниковата стрелка) и от двете страни на които лежат по равен брой (505 или 504, ако правата минава през две червени точки) червени точки. Аналогично дефинираме и множеството $B(\varphi)$ за сините точки. За всяко фиксирано φ, множествата $R(\varphi)$ и $B(\varphi)$ представляват две ивици в равнината (някои от ивиците е възможно да са изродени в единствена права) и нека означим средните им прави съответно с $r(\varphi)$ и $b(\varphi)$. Чрез принцип за непрекъснатост ще докажем, че за някое φ_0 е изпълнено равенството $r(\varphi_0) = b(\varphi_0)$.

Ако $r(0) = b(0)$, то $\varphi_0 = 0$. Да допуснем, че $r(0) \neq b(0)$ и нека, б.о.о. $r(0)$ се намира *в ляво* от $b(0)$, ако гледаме по посока на направлението на правите. Изменяйки ъгъла от 0 до π получаваме, че $r(\pi)$ се намира *в дясно* от $b(\pi)$, тъй като тези прави съвпадат с първоначалните, но направлението им е противоположното. Тъй като $r(\varphi)$ и $b(\varphi$ са непрекъснати функции на ъгъла φ, то трябва да съществува $\varphi_0 \in (0, \pi)$, за който $r(\varphi_0) = b(\varphi_0)$. И в двата случая, Боб има печеливша стратегия.

Сега, ако правата $\ell = r(\varphi_0) = b(\varphi_0)$ не съдържа оцветени точки, то тя върши работа на Боб. Ако съдържа, например две червени точки R_1 и R_2, то съвсем леко завъртане на правата около средата на отсечката R_1R_2 ще върши работа на Боб.

Задача 3. Да се докаже, че всички естествени числа n, с изключение на краен брой, могат да се представят като сума на 2020 две по две различни естествени числа $k_1, k_2, \ldots, k_{2020}$ такива, че k_i дели k_{i+1} за всяко $i = 1, \ldots, 2019$.

Решение. Ще докажем по индукция по-общ резултат, а именно, че за всяко естествено число $r \geq 2$ съществува $N(r) \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $n \geq N(r)$ съществуват естествени числа $k_1, k_2, \ldots, k_r$ със свойството

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r, \quad k_i \mid k_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, r-1.$$

При $r = 2020$ ще следва твърдението в задачата.

База: При $r = 2$, имаме $n = 1 + (n-1)$ и значи $N(2) = 3$.

Индукционна стъпка: Нека твърдението е вярно за $r = k$ и нека разгледаме $r = k+1$ с $N(k+1) = 4N(k)^3$. За всяко естествено число $n = 2^\alpha(2l+1) \geq N(k+1) = 4N(k)^3$ или $2^\alpha \geq 2N(k)^2$ или $2l+1 > 2N(k)$. Ако $2^\alpha \geq 2N(k)^2$, то съществува естествено число $2t \leq \alpha$, такова че $2^{2t} \geq 2N(k)^2$ и следователно $2^t + 1 \geq N(k)$. По индукционно предположение,

$$2^t + 1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_k, \quad 1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k, \quad b_i \mid b_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Тогава

$$\begin{aligned} 2^\alpha &= 2^{\alpha-2t} \cdot 2^{2t} = 2^{\alpha-2t}\left[1 + (2^t-1)(2^t+1)\right] = \\ &\quad 2^{\alpha-2t} + 2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_1 + 2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_2 + \cdots + 2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_k \\ \Longrightarrow &\quad n = 2^{\alpha-2t}(2l+1) + 2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_1(2l+1) + \cdots + 2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_k(2l+1). \end{aligned}$$

Ако $2l+1 > 2N(k)$, то $l > N(k)$ и значи $l = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$, откъдето

$$n = 2^\alpha + 2^{\alpha+1}c_1 + 2^{\alpha+1}c_2 + \cdots + 2^{\alpha+1}c_k.$$

С това индукционната стъпка е доказана и решението е завършено.