Тема на седмицата (20-26 април 2020 г.)
Решения

Задача 1 *В триъгълник ABC точките E и F от страните AB и AC съответно са равноотдалечени от средата на страната AB. Описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$ се пресичат за втори път в точка P, а K е пресечната точка на допирателните през E и F към описаната около $\triangle AEF$ окръжност. Да се намери $\angle APK$.*

Решение: Нека M е средата на BC, а M' е средата на EF. Без ограничение на общността нека $P \in \widehat{AC}$ – малката дъга от описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Нека $\angle PCA = \angle PBA = \phi$. Да забележим още, че описаната около $\triangle PEF$ окръжност имаме, че:

$$\angle CFP = 180^\circ - \angle PFA = 180^\circ - \angle PEA = \angle BEP.$$

Това показва, че $\triangle BPE \sim \triangle CPF$ и $\angle CPF = \angle BPE$. Това показва, че при въртяща хомотетия с център P, ъгъл $\angle BPE$ и коефициент $\frac{PE}{PB}$ триъгълникът BPC преминава в триъгълника EPF. Следователно, при тази въртяща хомотетия M се изобразява в M', откъдето $\triangle MPM' \sim \triangle BPE$. Оттук получаваме, че:

$$\angle PMM' = \angle EBP = \phi.$$

Тъй като $EM = FM$ и $KE = KF$, то MK е симетралата на EF, откъдето $M' \in MK$ и $\angle MM'E = 90^\circ$. Сега, за триъгълник PEF имаме, че PK е симедианата към страната EF, откъдето:

$$\angle KPE = \angle FPM' = \angle CPM,$$

където второто равенство следва от въртящата хомотетия. Така получаваме, че:

$$\angle KPC = \angle KPM + \angle MPC = \angle KPM + \angle KPE = \angle MPE.$$

Остана да забележим, че в от триъгълник MPE може да намерим, че $\angle MPE = 90^\circ - \angle ABC$. Това може да се види така. Първо, $\angle PEF = \angle PBC$ от въртящата хомотетия. Второ, както видяхме по-горе, $\angle PMM' = \angle PBE$. Накрая пресмятаме:

$$\begin{aligned}\angle PEM + \angle EMP &= (\angle PEF + \angle M'EM) + (\angle EMM' + \angle M'MP)\\ &= \angle PEF + 90^\circ + \angle M'MP = 90^\circ + \angle EBC,\end{aligned}$$

където в предпоследното равенство използвахме, че $\angle MM'E = 90^\circ$, а в последното – $\angle PEF + \angle M'MP = \angle PBC + \angle EBP$. Така получихме, че:

$$\begin{aligned}\angle KPC &= \angle MPE = 180^\circ - (\angle PEM + \angle EMP)\\ &= 180^\circ - (90^\circ + \angle EBC) = 90^\circ - \angle EBC = 90^\circ - \angle ABC.\end{aligned}$$

Тъй като $\angle APC = 180^\circ - \angle ABC$, то от последното получаваме, че $\angle APK = \angle APC - \angle KPC = 90^\circ$.

Задача 2 *Нека $p > 3$ е просто число, а n е естествено число. Да се намери остатъкът на:*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{np}{kp}$$

при деление на p^3.

Решение: Нека $w_1, w_2, \dots, w_p$ са (всички комплексни) корените на уравнението $x^p = -1$. Тогава за всяко j, което не се дели на p е в сила, че:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i^j = 0. \text{ (защо?)}$$

Сега е ясно, че:

$$\sum_{i=1}^{p}(w_i+1)^{np} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{np}\binom{np}{j}w_i^j = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{p}\binom{np}{kp}w_i^{pk} = p\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{np}{pk}.$$

Така, за да намерим остатъка на $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{np}{kp} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{np}{kp} - 1$ при деление на p^3, е достатъчно да намерим остатъка на $\sum_{i=1}^{p}(w_i+1)^{np}$ при деление на p^4.

За целта, да забележим, че:

$$(w_i+1)^{np} = ((w_i+1)^p)^n = (w_i^p + 1 + \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}w_i^j)^n = (\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}w_i^j)^n.$$

Сега всеки от коефициентите $\binom{p}{j}$ се дели на p при $0 < j < p$. Това, заедно с равеснствата:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i^j = \begin{cases} 0, \text{ ако } p \not| j \\ p(-1)^j, \text{ ако } p|j \end{cases}$$

показва, че:

$$p^{n+1} = p.p^n | \sum_{i=1}^{n}(w_i+1)^{np}.$$

Оттук, ако $n \geq 3$, $p^4 | p\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{np}{kp}$, тоест:

$$p^3 | \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{np}{kp}.$$

При $n = 1$ непосредствено се проверява, че $\binom{p}{0} - \binom{p}{p} = 0$ и горната делимост остава в сила. Така остава случаят $n = 2$. За него, проблем представлява единствено намирането на остатъка $\binom{2p}{p} \pmod{p^3}$, защото другите два биномни коефициента имат принос 1.

За целта да запишем биномния коефициент $\binom{2p}{p}$ във вида:

$$\binom{2p}{p} = 2\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(p+i)}{(p-1)!}$$

и да разгледаме числителя:

$$\prod_{i=1}^{p-1}(p+i) = (p-1)! + p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} + p^2\sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(p-1)!}{ij} + p^3T,$$

където T е цяло число. Нека $R = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}$, $S = \sum_{i=2}^{p-1}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(p-1)!}{ij}$. Ще докажем, че R се дели на p^2, а на S – на p. За първия израз:

$$R = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} = \sum_{i=1}^{(p-1)/2}(\frac{(p-1)!}{i} + \frac{(p-1)!}{p-i}) = p\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\frac{(p-1)!}{i(p-i)}.$$

От теоремата на Уилсън имаме, че $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, докато $i(p-i) \equiv -i^2 \pmod{p}$. Оттук, когато i пробягва всички остатъци от 1 до $(p-1)/2$, i^2 пробягва всички квадратични остатъци по модул p и следователно същото е в сила и за $\frac{(p-1)!}{i(p-i)}$. Остана да забележим, че:

$$R' = \sum_{i=1}^{(p-1)/2} i^2 = \frac{(p-1)/2(p+1)/2p}{6}$$

и тъй като $p > 3$, то това R' се дели на p и следователно $p | \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \frac{(p-1)!}{i(p-i)}$. Това показва, че $p^2 | R$.

За израза S нещата са по-прости. Както и по-горе $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ и тъй като $p > 2$, спокойно може да разгледаме:

$$2S = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p-1} \frac{(p-1)!}{ij} \equiv \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p-1} ij \pmod{p}.$$

Тъй като сумата на всички остатъци по модул p дава число, кратно на p, то последната е сравнима с:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p-1} ij \pmod{p} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$$

и отново при $p > 3$, получаваме, че $p | 2S$, а следователно и $p | S$. С това показахме, че:

$$\binom{2p}{p} = 2.1 + 2\frac{pR + p^2S + p^3T}{(p-1)!} \equiv 2 \pmod{p^3},$$

защото числителят на дробта се дели на p^3, а знаменателят е взаимнопрост с p. Следователно и при $n = 2$ имаме, че:

$$\binom{2p}{0} - \binom{2p}{p} + \binom{2p}{2p} \equiv 1 - 2 + 1 \pmod{p^3} = 0 \pmod{p^3}.$$

Така, окончателно: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{np}{kp} \equiv -1 \pmod{p^3}$.

Задача 3 *Град с формата на квадрат $n \times n$ е разделен от улици на квартали 1×1. Улиците в този град са двупосочни – от север на юг и от изток на запад. Човек живее в най-югозападната точка на града и ходи на работа в най-североизточната точка на града. Всяка сутрин той избира такъв път, който никога не завива на юг или на запад и така, че да мине по възможно най-малко улици, по които вече е минавал. Вечер, когато се връща от работа, човекът избира такъв път, който никога не завива на север или на изток и отново така, че да мине по възможно най-малко улици, по които вече е минавал.*

Да се докаже, че за n дни, независимо от конкретните пътища, които избира човекът, той ще е извървял всяка от улиците, тоест ще е минал поне веднъж по всяка от точките на тези улици.

Решение: Разглеждаме града като мрежа от квадратчета 1×1 и страната всяко квадратче ще наричаме ребро. На всяко ребро поставяме посока на север (горе) или на изток (дясно). Нека градът представлява квадрата $ABCD$ – като A е точката, в която живее човекът, а B – най-югоизточната точка, (съответно C – неговото работно място). Да означим още върховете по отсечките AB, BC, CD, DA съответно:

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B, \qquad B = B_n, B_{n-1}, \ldots, B_1, B_0 = C$$
$$C = C_0, C_1, \ldots, C_n = D, \qquad D = D_0, D_1 \ldots, D_{n-1}, D_n = A.$$

Тегло $w(v)$ на връх v от мрежата ще наричаме по-малката дължина от тази на най-къс път от v до A или от v до C.

Ясно е, че за всички вътрешни върхове, а също за върховете B и D е изпълнено, че броят на влизащите в тях ребра е равен на броя на излизащите от тях ребра. Тези върхове ще наричаме *равновесни*. Също така за върховете, B_i, C_i за $1 \leq i \leq n-1$ е изпълнено, че в тях влизат две ребра и излиза едно. Тези върхове ще наречем *финални*. Аналогично за върховете A_i, D_i за $1 \leq i \leq n-1$ е в сила, че в тях влизо едно и излизат две ребра. Тези върхове ще наричаме *начални*. Да забележим още, че $w(A_i) = w(B_i) = w(C_i) = w(D_i) = i$ за всяко $0 \leq i \leq n$.

Очевидно, пътищата от A до C минават през точно $2n$ ребра и $2n+1$ върха, чиито тегла първо растат от 0 до n, а след това намаляват от n до 0. Накрая, ще номерираме дните, започвайки от 0 и първоначално ребрата ще са черни, а всяко ребро, по което човекът е минал ще оцветяваме в синьо. Целта е да покажем, че след $(n-1)$-ия ден всички ребра ще са сини. За да постигнем тази цел, ще покажем по индукция, че за всяко $0 \leq k < n$ са изпълнени следните свойства:

1. през ден номер k са оцветени точно $4(n-k)$ ребра.

2. след ден k всички ребра, инцидентни с връх с тегло k са сини.

3. по всяко синьо ребро, което е инцидентно с връх с тегло по-голямо от k човекът е минал точно веднъж.

При $k = 0$ нещата са ясни. Има поне два независими пътя от A до C (и съответно от C до A), при което в единия попада реброто AA_1, а в другия AD_1 и по същия начин в единия път попада реброто CC_1, а в другия CB_1. Така че, наистина: (i) се оцветяват $2.(2n) = 4n$ ребра; (ii) ребрата инцидентни с A и C – единствените с тегло 0 – са сини; (iii) по всяко синьо ребро човекът е минал веднъж.

Сега да рагледаме индукционната стъпка от $k-1$ към $1 \leq k < n$. Тъй като първите k и последните k върха от всеки път от A до C са инцидентни на върхове с тегла от 0 до $k-1$, то от индукционното предположение те са сини. Така, всеки от двата пътя от A до C и от C до A, изминати на k-ия ден съдържат по не повече от $2n - 2k = 2(n-k)$ черни ребра. Ще докажем, че всеки от тях съдържа точно по толкова черни ребра, които съответно ще бъдат оцветени в синьо. Това ще покаже, че (i) и (iii) са изпълнени след ден номер k.

Върховете A_i, B_i, C_i, D_i за $i \geq k$ са инцидентни с по 3 освен от индукционното предположение по всяко от сините ребра, които са инцидентни с тях е минал най-много един път. Следователно за всеки такъв връх, те са с тегло $i \geq k$, има (поне едно) инцидентно ребро, което е черно. При това, за $i = k$, има точно едно такова ребро, защото реброто, което е инцидентно с върха с тегло $k-1$ вече е синьо от индкуционното предположение.

Сега ще построим пътища от черни ребра от A_i до B_i за $i \geq k$. Започваме от A_{n-1}, при $i = n-1$. Следваме черни ребра по стрелките, от върховете, които посещаваме, докато не стигнем до финален връх F, от който не може да излезем. Нека този път е π'_{n-1}. Ако $F = B_{n-1}$ полагаме $\pi_{n-1} = \pi'_{n-1}$ и сме готови. Ако ли не, π'_{n-1} раделя мрежата на две части, като в частта, в която се намира B_{n-1} единственият начален връх е A_{n-1}. Поради това, ако сега започнем от B_{n-1} и следваме черните ребра обратно на стрелките, ще опишем път π''_{n-1}, който ще стигне до π'_{n-1}. Сега получаваме черния път π_{n-1}, като първо следваме пътя от π'_{n-1} от A_{n-1} до пресечната му точка с π''_{n-1} и след това π''_{n-1} по стрелките докато стигнем в B_{n-1}. Сега премахваме пътя π_{n-1}, при което върховете A_{n-1} и B_{n-1} стават инцидентни на четен брой черни ребра и може да приложим същата конструкция за $i = n-2$ и т.н. за $i = k$.

Това показва, че човекът може да избере път от A до A_k, след това до B_k и до C, по който участъкът от A_k до B_k е съставен от черни ребра – общо $2n - 2k$. От горните разсъждения следва, че максималният брой черни ребра, по които може да мине човекът е $2(n-k)$ и той трябва да избере именно такъв път. Да кръстим този път Π. Да забележим, че

Π трябва да свърже с черни ребра именно един от върховете A_k или D_k с един от върховете B_k или C_k. Наистина, всеки един от останалите върхове с тегло k има по две съседни ребра с върхове с тегло $k-1$. От индукционното предположение те са сини. Тогава, отново от индукционното предположение, тъй като по всяко синьо ребро, инцидентно с връх с тегло k човекът е минал точно веднъж, то и другите две иницидентни ребра с този връх са сини. Това показва, че единствените върхове с тегло k, които имат инцидентно черно ребро са: A_k, B_k, C_k, D_k.

Нека A' и B' са двата от върховете $\{A_k, B_k, C_k, D_k\}$, които не са част от Π. Сега оцветяваме Π в синьо и както и по-горе, може да покажем, че има черен път, който свързва A' и B'. Това показва, че човекът може да се върне от C до A по път Π', който минава по точно $2(n-k)$ черни ребра. С това първата и третата част от твърдението са доказани. От това, че по всяко синьо ребро, което свързва връх с тегло k с връх с тегло $k+1$ не повече от веднъж, следва, че броят на сините ребра, които свързват връх с тегло k с връх с тегло $k+1$ е: $2(k+1)$ – за дните от 0 до k включително по две ребра. Но това е броят на всички ребра, които свързват връх с тегло k с връх с тегло $k+1$. Тъй като ребрата, които свързват върхове с тегло k и $k-1$ са сини от индукционното предположение, то и втората част от твърдението е доказана. Това завършва доказателството на твърдението.

Следователно след ден $k = n-1$ броят на сините ребра е $4\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = 2n(n+1)$ – което е броят не ребрата в мрежата. Тоест всички ребра ще са сини, което показва, че човекът ще е изварвял всяка от улиците.