Тема на седмицата (13-19 април 2020 г.)

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC > AB$. Нека D е точка от страната BC, за която $2\angle DAC = \angle ABC - \angle ACB$. Описаната около $\triangle ACD$ окръжност пресича за втори път страната AB в точка E, а описаната около $\triangle ABD$ окръжност пресича за втори път страната AC в точка F. Ъглополовящата на $\angle BDE$ пресича страната AB в точка P, а ъглополовящата на $\angle CDF$ пресича страната AC в точка Q. Да се докаже, че правите PQ и AB са перпендикулярни.

Задача 2. Нека P е неконстантен полином с цели коефициенти. Съществува ли функция $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ със следното свойство: броят на целите числа x, за които $T^{(n)}(x) = x$ е равен на $P(n)$ за всяко естествено число n? (С $T^{(n)}$ означаваме n-тата итерация на T.)

Задача 3. Дадена е огърлица с 2020 мъниста, всяко от които е номерирано с цяло число. Сумата от всички номера е равна на 2019. Винаги ли е възможно огърлицата да се разкъса между две мъниста така, че в получения наниз (в една от посоките) мънистата да са подредени с номерата си $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ така, че да са изпълнени неравенствата

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq k-1 \qquad \text{за} \quad k = 1, 2, \ldots, 2020?$$