

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

От една диофантова транспортна задача от 2016 година и нейното решение през 1903 година към класически проблеми на алгебрата

Силвия Бумова, Веселин Дренски

18 октомври 2017

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Посвещава се на 70-тата годишнина
на Института по математика и информатика – БАН

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Благодарности

Частично финансирано от Договор И02/18
с Фонд “Научни изследвания”
“Компютърни и комбинаторни методи
в алгебрата и приложения”.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Докладът включва резултати от международен колектив

Българи у нас и в чужбина:

- ▶ Силвия Бумова (ИМИ – БАН)
- ▶ Георги Генов (ИМИ – БАН, пенсионер)
- ▶ Румен Данговски (УчИМИ, сега в MIT)
- ▶ Веселин Дренски (ИМИ – БАН)
- ▶ Пламен Коев (Сан Хосе, Калифорния)
- ▶ Боян Костадинов (докторант в ТУ – София)
- ▶ Пламен Кошлуков (Кампинас, Бразилия)
- ▶ Елица Христова (ИМИ – БАН).

Чуждестранни математици:

- ▶ Франческа Бенанти (Палермо, Италия)
- ▶ Анджела Валенти (Палермо, Италия)
- ▶ Чандър Канта Гупта (Уинипег, Канада)
- ▶ Антонио Джамбруно (Палермо, Италия)
- ▶ Матяш Домокош (Будапеща, Унгария)
- ▶ Роберто Ла Скала (Бари, Италия)
- ▶ Шехмус Фъндък (Адана, Турция)
- ▶ Ралф Холткамп (Бохум (сега в Хамбург), Германия)
- ▶ Лучо Чентроне (Бари, Италия, сега в Кампинас, Бразилия).

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Съдържание

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Въведение – Chicken McNuggets

През 1979 година Макдоналдс пуска в продажба Chicken McNuggets (хапки от пилешки гърди в златиста, хрупкава панировка със сос по избор).



Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Първоначално пилешките хапки са пуснати в опаковки от 6, 9 и 20.



(Днес повечето заведения на Макдоналдс в САЩ продават Chicken McNuggets в опаковки от 4, 6, 10, 20, 40 и 50 хапки. В България те се предлагат по 6 и 9, а ако се вземат като меню с картофки и кока-кола – по 5.)

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Задача за Chicken McNuggets (The Chicken McNugget Problem)

Колко пилешки хапки могат да се купят в Макдоналдс, ако се използват само опаковки от 6, 9 или 20 хапки?

Решение

Използвайки само опаковки от 6 и 9 хапки, могат да се получат всички кратни на 3, започвайки от 6.

Тъй като 20 е сравнимо с 2 по модул 3, с една опаковка от 20 пилешки хапки и няколко опаковки от 6 и 9 хапки, могат да се реализират всички числа от вида $20 + 3n$, $n \geq 2$, т.е. всички числа, сравними с 2 по модул 3, започвайки от 26.

Аналогично, комбинирайки две опаковки от 20 хапки с опаковки от 6 и 9, могат да се получат всички числа $\equiv 1 \pmod{3}$, започвайки от 46.

Следователно, така можем да получим всяко число от 44 нагоре.

Естествените числа n , които удовлетворяват задачата за Chicken McNuggets се наричат числа на McNuggets (McNugget numbers). Очевидно, че за тях съществува наредена тройка (a, b, c) от неотрицателни цели числа такава, че

$$6a + 9b + 20c = n.$$

Единствените естествени числа, които не са числа на McNuggets са 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37 и 43. (Това е редицата A065003 (<https://oeis.org/A065003>) в Енциклопедията на целочислените редици, основана от Слоан през 1964 г.)

Фробениус и Силвестър

В края на XIX век редица математици, сред които Фробениус и Силвестър, разглеждат (и решават напълно или частично) следния проблем.

Проблем. Ако $a_1, \dots, a_k$ са взаимно прости естествени числа, кои числа n могат да се представят във вида

$$n = a_1 z_1 + \dots + a_k z_k,$$

където $z_1, \dots, z_k$ са неотрицателни цели числа, т.е.

$z_1, \dots, z_k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$?

Ако $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, то множеството на всички числа от вида

$$n = a_1 z_1 + \dots + a_k z_k, \quad z_1, \dots, z_k \in \mathbb{N}_0,$$

е числов моноид, т.е. е затворено относно операцията събиране. С други думи, то е подполугрупа с 0 на адитивната група $\mathbb{N}_0$.

Известно е, че всеки числов моноид се поражда от краен брой числа и притежава единствена минимална система пораждащи.

Теорема

Ако $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ и $(a_1, \dots, a_k) = 1$, то всички достатъчно големи естествени числа се представят във вида

$$n = a_1 z_1 + \dots + a_k z_k, \quad z_1, \dots, z_k \in \mathbb{N}_0.$$

Най-голямото естествено число, което не може да се представи в този вид, се нарича число на Фробениус.

Например, числото на Фробениус за числата на McNuggets е равно на 43.

MATHEMATICS

FROM

THE EDUCATIONAL TIMES,

WITH ADDITIONAL PAPERS AND SOLUTIONS.

7382. (By Professor SYLVESTER, F.R.S.) — If p and q are relative primes, prove that the number of integers inferior to pq which cannot be resolved into parts (zeros admissible), multiples respectively of p and q , is

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

[If $p = 4$, $q = 7$, we have $\frac{1}{2}(p-1)(q-1) = 9$; and 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17 are the only integers inferior to 28, which are neither multiples of 4 or 7, nor can be made up by adding together multiples of 4 and 7.]

Math. Questions from the Educational Times, 41 (1884), 21.

Solution by W. J. CURRAN SHARP, M.A.

If the product $(1 + x^p + x^{2p} + \dots + x^{pq})(1 + x^q + x^{2q} + \dots + x^{pq})$ be considered, each term between 1 and x^{pq} corresponds to a number less than pq , and of the form $mp + nq$; also $2x^{pq}$ is the middle term, and the coefficients from each end are the same. Hence twice the number of integers of the form $mp + nq$, and less than pq , is the value of the above product when $x=1$ with four deducted, since the terms involving x^1 , x^{pq} , x^{2pq} are not included; and therefore the number of these integers is

$$\frac{1}{2}(p+1)(q+1) - 2,$$

and the number of those which cannot be put into this form

$$= pq - 1 - \left[\frac{1}{2}(p+1)(q+1) - 2\right] = \frac{1}{2}[pq - p - q + 1] = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

Проблем на Фробениус за монетите

Разглежданият по-горе проблем се формулира популярно като **Проблем на Фробениус за монетите**: *Коя е най-голямата сума (числото на Фробениус), която не може да се плати с монети от няколко фиксирани номинала?*



С монети от 5 и 2 пенса могат да се платят всички суми с изключение на 1 и 3 пенса.

По-горе споменахме, че такава сума съществува тогава и само тогава, когато избраните номинали на монетите са взаимно прости.

Формула за числото на Фробениус е известна само когато монетите са от два взаимно прости номинала a и b . Тогава то е равно на $ab - (a + b)$. В общия случай такава формула не е известна, но *при фиксирано количество от номинали има алгоритъм, който пресмята числото на Фробениус за полиномно време.*

(Входните данни на такъв алгоритъм са логаритмите на номиналите.)

В общия случай не е намерен алгоритъм, който решава задачата за полиномно време. Има хипотеза, че този проблем е NP-труден.

БНБ решава задачата за числото на Фробениус по тривиален начин, като пуска монети и по една стотинка. Очевидно, че всяка сума може да се плати с такива монети.

Но пред всяка държава стои основен проблем, индиректно свързан със задачата на Фробениус за монетите.

Какви номинали на монети и банкноти и в какво количество трябва да се пуснат в обръщение?

Това е сложна мултидисциплинарна задача, която изисква отговори на редица въпроси.

Проблеми

(Това е лично виждане на един от докладчиците, за което той не може да приведе сериозни научни аргументи.)

- ▶ Необходими са статистически данни за размера и количеството на плащанията в брой. Какви номинали на монети и банкноти и в какво количество са необходими за оптимизиране на процеса на плащанията?
- ▶ Каква е цената на изработването на съответните монети и банкноти? (В историята са известни случаи на хиперинфлация, когато е по-изгодно да се продадат монетите на “Вторични суровини”, отколкото да се плаща с тях.)

- ▶ Как бързо се похабяват монетите и банкнотите и колко често те трябва да се подменят?
- ▶ Колко бързо циркулират паричните средства и каква част от тях се връщат в банката?
- ▶ Отчитане на последствията, ако се пуснат в обръщение повече пари, което може да доведе до намаляване на тяхното гарантиране от държавата.
(Носят се легенди, че по време на Втората световна война Германия, с цел да дестабилизира икономиката на САЩ, е отпечатала голямо количество фалшиви долари с много високо качество. Правителството на САЩ е решило, че е по-безболезнено и по-лесно да остави тези пари в обръщение, вместо да се бори с тяхното разпространение.)

- ▶ Отчитане на ефекта от политически и природни катаклизми.
(Например, това е предсказването на процента на инфлация. Друг пример е, че голяма част от образуването на монетните находки от Античността и Средновековието са резултат на решение парите да се съхранят за по-добри времена, например по време на война или на разбойнически набези.)

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

- ▶ Отчитане на неочаквани ефекти от политически или икономически решения.
(Известни са случаи от близкото минало, когато ограничаването на продажбата на алкохол затруднява циркулирането и връщането на парите в банката, което води до сериозни затруднения и забавяне при изплащането на заплатите.)

Производящи функции и теорема на Шур

Да разгледаме формалния степенен ред

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{20})} \\ &= (1+t^6+t^{12}+\dots)(1+t^9+t^{18}+\dots)(1+t^{20}+t^{40}+\dots) \\ &= 1+t^6+t^9+t^{12}+t^{15}+2t^{18}+t^{20}+t^{21}+2t^{24}+t^{26}+2t^{27}+t^{29}+2t^{30}+\dots \end{aligned}$$

Коефициентът пред t^n в развитието на реда дава по колко различни начина може да се представи числото n във вида $6a + 9b + 20c$, $a, b, c \in \mathbb{N}_0$:

$$24 = 6 \cdot 4 + 9 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 20 \cdot 0.$$

Да представим дробта чрез елементарни дробни

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1080(1-t)^3} + \frac{2}{135(1-t)^2} + \frac{1}{240(1+t)^2} + \frac{2+t}{54(1+t+t^2)^2} \\
 & + \frac{275}{2592(1-t)} + \frac{11}{160(1+t)} + \frac{113+40t}{324(1+t+t^2)} \\
 & + \frac{1+t}{40(1+t^2)} + \frac{2+2t+t^2}{20(1+t+t^2+t^3+t^4)} + \frac{1}{12(1-t+t^2)} \\
 & + \frac{1+t+t^2-t^3+2t^4-t^5}{9(1+t^3+t^6)} - \frac{t(2-t+2t^2)}{20(1-t+t^2-t^3+t^4)} \\
 & + \frac{1+t-2t^2-2t^3+3t^4+3t^5-4t^6+t^7}{10(1-t^2+t^4-t^6+t^8)}.
 \end{aligned}$$

Знаменателите на събираемите са степени на циклотомичните полиноми $\Phi_d(t)$, където d е делител на 6, 9 и 20. Ако d дели m , то полиномът $\Phi_d(t)$ дели $1 - t^m$. Следователно

$$\frac{1}{(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{20})} = \frac{1}{1080(1-t)^3} + \frac{p_2(t)}{(1-t^2)^2} + \frac{p_3(t)}{(1-t^3)^2} \\ + \frac{q_6(t)}{1-t^6} + \frac{q_9(t)}{1-t^9} + \frac{q_{20}(t)}{1-t^{20}},$$

$$p_2(t), p_3(t), q_6(t), q_9(t), q_{20}(t) \in \mathbb{Q}[t].$$

Тъй като

$$\frac{1}{(1 - t^m)^r} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + r - 1}{r - 1} t^{mn},$$

ръстът на коефициентите пред степените на t е ограничен от полином на n от степен $r - 1$.

Следствие. За големи стойности на n броят на начините, по които n се представя във вида $6a + 9b + 20c$ е

$$\frac{n^2}{2! \cdot 6 \cdot 9 \cdot 20} (1 + o(1)).$$

Теорема на Шур

Ако естествените числа $a_1, \dots, a_k$ са взаимно прости, то за големи стойности на n броят на представянията на n във вида $a_1 z_1 + \dots + a_k z_k$ е

$$\frac{n^{k-1}}{(k-1)! a_1 \cdots a_k} (1 + o(1)).$$

Доказателството използва елементарни дроби, както по-горе.

Производящи функции

Формалният степенен ред

$$\frac{1}{(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{20})} = \sum_{n \geq 0} p_n t^n$$

е производящата функция на редицата $p_0, p_1, p_2, \dots$, където p_n е броят на различните начини, по които числото n може да се представи във вида $6a + 9b + 20c = n$.

Извод

Много от свойствата на една редица могат да се намерят като се изследва с различни методи (аналитични, алгебрични, комбинаторни и др.) производящата функция на редицата.

Диофантова транспортна задача

Aureliano M. Robles-Pérez and José Carlos Rosales, *On a transport problem and monoids of non-negative integers*,
(<https://arxiv.org/pdf/1611.02627.pdf>)

Транспортна фирма превозва коли от фабрика към оторизиран дилър, като за целта използва малки и големи товарни автомобили с капацитет съответно от три и шест коли.

- ▶ Разходите на фирмата за използване на тези товарни автомобили са съответно 1200 и 1500 евро.
- ▶ От друга страна, фирмата взема такса (приход) от 300 евро за всеки транспортиран автомобил.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

- ▶ Като бонус за клиента фирмата предлага да превози¹
безплатно един автомобил допълнително.
- ▶ Транспортната фирма смята, че поръчаният транспорт е
рентабилен, когато тя има печалба от най-малко 900 евро.

Проблем 1

Колко коли най-малко трябва да бъдат транспортирани, за да се постигне рентабилност?

Проблем 2

Какви стойности може да приема печалбата?

Проблем 3

С какви товарни автомобили е най-изгодно да стане транспортирането?

Авторите на статията решават първите два проблема по следния начин.

Да означим с n броя на превозените автомобили, а с x и y този на използваните малки и големи автобуси. Задачата се свежда до решане в неотрицателни цели числа на следната система от диофантови неравенства:

$$300n \geq 1200x + 1500y + 900$$

$$n + 1 \leq 3x + 6y$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

След преобразувания получаваме:

$$\begin{aligned}n &\geq 4x + 5y + 3 \\ 3x + 6y &\geq n + 1\end{aligned}$$

По-общо, те разглеждат система от две неравенства в неотрицателни цели числа

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + \alpha \leq n$$

$$n \leq b_1x_1 + \cdots + b_kx_k - \beta,$$

където a_i, b_i, α, β са неотрицателни цели числа. Те доказват, че множеството S от всички числа n , за които системата има поне едно решение, заедно с 0 , е числов моноид и намират алгоритми за намиране на пораждащите на $S \cup \{0\}$.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Методът на Елиот от 1903

E.B. Elliott, *On linear homogeneous diophantine equations*, Quart. J. Pure Appl. Math. **34** (1903), 348-377.

Методът е доразвит в Ω -смятането на МакМахон

P.A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vols. 1 and 2, Cambridge Univ. Press. 1915, 1916. Reprinted in one volume: Chelsea, New York, 1960.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Как да решим Проблем 3? Първа идея на Елиот

Нека $T \subset \mathbb{N}_0^3$ е множеството от всички тройки (p, q, n) , за които

$$n \geq 4p + 5q + 3, \quad 3p + 6q \geq n + 1,$$

т.е. са решения на системата от неравенства

$$n \geq 4x + 5y + 3, \quad 3x + 6y \geq n + 1.$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Въвеждаме формалния степенен ред на три променливи

$$f(t, u, v) = \sum_{(p,q,n) \in T} t^p u^q v^n.$$

Решаването на Проблем 3 е еквивалентно на пресмятането на реда $f(t, u, v)$ и намирането на ненулевите му коефициенти.

Втора идея на Елиот

Нека

$$w(t, u, v) = \sum_{(p,q,n)} \alpha_{pqn} t^p u^q v^n \in \mathbb{C}[[t, u, v]]$$

е формален степенен ред на три променливи и нека a, b, c, d а цели числа. Искаме да пресметнем частта от реда $w(t, u, v)$

$$w_+(t, u, v) = \sum_{(p,q,n) \in A} \alpha_{pqn} t^p u^q v^n,$$

където A е множеството от тройки (p, q, n) , за които $ap + bq + cn \geq d$.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Да разгледаме лорановия ред

$$\frac{1}{z^d} w(tz^a, uz^b, vz^c) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m(t, u, v) z^m.$$

Тогава

$$w_+(t, u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(t, u, v).$$

Проблем

Ако е даден лоранов ред

$$h(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^m$$

с коефициенти h_m от някакво поле K , как да пресметнем “половината” от реда

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m?$$

Нетривиална задача

Ако

$$w(t, u) = \frac{t - u}{t(1 - (t + u))} = (t - u) \sum_{p, q \geq 0} \binom{p + q}{p} t^{p-1} u^q,$$

и искаме да отделим частта от реда с $p \geq q$, ще получим

$$w_+(t, u) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4tu}}{2tu} \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4tu}}{2tu} t}.$$

Редът $w_+(t, u)$ не е случаен. По-нататък ще се окаже, че той е редът на кратностите на функциите на Шур за реда на Хилберт на свободната асоциативна алгебра $K\langle x, y \rangle$ на две променливи над поле K , а над поле с характеристика 0 редът $w_+(t, t)$ е редът на Хилберт за алгебрата на инвариантите $K\langle x, y \rangle^{UT_2(K)}$, където $UT_2(K)$ е групата от матрици от вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in K.$$

Трета идея на Елиот

Тя решава задачата за лоранови редове, които са рационални функции от вида

$$h(z) = p(z) \prod \frac{1}{(1 - A_{ij}z^i)^{b_{ij}}}.$$

Тук числителят $p(z)$ е лоранов полином с коефициенти от алгебрата на полиномите $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_k]$, а знаменателят е произведение от степени на краен брой лоранови биноми $1 - A_{ij}z^i$, където A_{ij} са мономи на $t_1, \dots, t_k$ и $i \in \mathbb{Z}$. Берел нарича такива функции “хубави рационални функции”.

Алгоритъм на Елиот

Рационалната функция $h(z)$ съдържа произведение на три вида дроби

$$\frac{1}{1-A}, \quad \frac{1}{1-Bz^b}, \quad \frac{1}{1-C/z^c}.$$

Първата дроб умножава лорановия ред с израз, който не зависи от z . Следователно, тя не влияе на отделянето на неотрицателните степени на z .

Развитието на втората дроб съдържа само неотрицателни степени на z . Ако функцията $h(z)$ не съдържа дроби от третия тип, тя е сума от полином $p(z)$ и дроби от вида

$$p(z) \prod \frac{1}{1 - B_{ij}z^i}, \quad \frac{A}{z^m}, \quad \frac{A}{z^m \prod (1 - B_{ij}z^i)}, \quad m > 0,$$

където $p(z)$ е полином с коефициенти от $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_k)$ и $A \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_k)$. Първата от тези дроби се развива в ред с неотрицателни степени на z и участва в развитието на $h_+(z)$, а втората дроб е отрицателна степен на z и не участва в $h_+(z)$.

За да намерим приноса към $h_+(z)$ на третата дроб

$$\frac{A}{z^m \prod (1 - B_{ij}z^i)}, \text{ намираме първите } m \text{ събираеми}$$

$$b_0 + b_1z + \cdots + b_{m-1}z^{m-1} \text{ от развитието в ред на}$$

$$\frac{A}{\prod (1 - B_{ij}z^i)}. \text{ Тогава приносът на дробта към } h_+(z) \text{ е}$$

$$\frac{1}{z^m} \left(\frac{A}{\prod (1 - B_{ij}z^i)} - (b_0 + b_1z + \cdots + b_{m-1}z^{m-1}) \right).$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Дробите $\frac{1}{1 - C/z^c}$ се развиват в лоранов ред, който не съдържа положителни степени на z . Ако $h(z)$ е произведение на полином $p(z)$ на z с коефициенти от $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_k)$ и на дроб с този вид, то $h_+(z)$ се получава от произведението на $p(z)$ с първите неположителни степени от развитието на $\prod \frac{1}{1 - C/z^c}$

Какво да правим, ако $h(z)$ съдържа дробни от двата вида

$\frac{1}{1 - Az^a}$ и $\frac{1}{1 - B/z^b}$? Елиот предлага да използваме равенството

$$\frac{1}{(1 - Az^a)(1 - B/z^b)} = \frac{1}{1 - ABz^{a-b}} \left(\frac{1}{1 - Az^a} + \frac{1}{1 - B/z^b} - 1 \right).$$

Избираме множител $(1 - Az^a)(1 - B/z^b)$ в знаменателя на реда

$$h(z) = p(z) \prod \frac{1}{(1 - A_{ij}z^i)^{b_{ij}}}.$$

и прилагаме за него равенството на Елиот. По такъв начин изразяваме $h(z)$ като сума на три хубави функции. Прилагаме отново равенството към тези от новите хубави функции, които съдържат в знаменателя си множител от вида $(1 - Cz^c)(1 - D/z^d)$. Оказва се, че след краен брой стъпки ще получим сума от дроби, знаменателите на които съдържат множители само от единия вид $1 - Cz^c$ и $1 - D/z^d$. А ние вече знаем какво да правим с такива дроби.

Решение на транспортната задача през 1903 година

За да намерим решенията в неотрицателни цели числа на неравенството $3x + 6y \geq n + 1$ ще разгледаме множеството

$$V = \{(p, q, n) \in \mathbb{N}_0^3 \mid 3p + 6q \geq n + 1\}$$

и ще пресметнем реда

$$f(t, u, v) = \sum_{(p, q, n) \in V} t^p u^q v^n.$$

Тръгваме от реда

$$w(t, u, v) = \frac{1}{(1-t)(1-u)(1-v)} = \sum_{p,q,n \geq 0} t^p u^q v^n$$

ще отделим събираемите $t^p u^q v^n$, за които $3p + 6q \geq n + 1$.

Развиваме в лоранов ред функцията

$$h(z) = \frac{1}{z} w(tz^3, uz^6, v/z) = \frac{1}{z(1 - tz^3)(1 - uz^6)(1 - v/z)}$$

и ще отделим неотрицателните степени на z .

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Прилагаме равенството на Елиот за дробта $\frac{1}{(1 - tz^3)(1 - v/z)}$:

$$\frac{1}{(1 - tz^3)(1 - v/z)} = \frac{1}{1 - tvz^2} \left(\frac{1}{1 - tz^3} + \frac{1}{1 - v/z} - 1 \right).$$

Функцията $h(z)$ се представя като сума на три дроби:

$$\frac{1}{z(1 - uz^6)(1 - tvz^2)(1 - tz^3)}, \frac{1}{z(1 - uz^6)(1 - tvz^2)(1 - v/z)},$$

$$\frac{1}{z(1 - uz^6)(1 - tvz^2)}.$$

Приносът на първата и третата дроб към $h_+(z)$ се получава веднага по алгоритъма, описан по-горе.

Например:

$$\frac{1}{z(1 - uz^6)(1 - tvz^2)} = (1 + uz^6 + u^2z^{12} + \dots)(1 + tvz^2 + t^2v^2z^4 + \dots)$$

$$= 1 + tvz^2 + \dots$$

и приносът към $h_+(z)$ е

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{(1 - uz^6)(1 - tvz^2)} - 1 \right) = \frac{z(-tv - uz^5 + tuvz^7)}{(1 - uz^6)(1 - tvz^2)}.$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Докато знаменателят на първоначалната дроб $h(z)$ е $z(1 - tz^3)(1 - uz^6)(1 - v/z)$, във второто събираемо-дроб той е $z(1 - uz^6)(1 - tvz^2)(1 - v/z)$. С други думи, ако степените на z в биномите бяха $(6, 3, -1)$, сега те са $(6, 2, -1)$.

Продължавайки по същия начин, на всяка крачка ще получаваме сума от дроби с “червени” знаменатели и такива, знаменателите на които са произведения от “червени” и “сини” биноми. Накрая ще получим събираемо, знаменателят на което е “син”. След като приключим този процес, полученият ред $h_+(z)$ е сума от дроби без “сини” знаменатели.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

След това ще разгледаме реда

$$h_+(1) = f(t, u, v) = \sum_{(p,q,n) \in V} t^p u^q v^n$$

и по същия начин ще отделим от него събираемите, за които $n \geq 4p + 5q + 3$.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Алгоритъм на Ксин

Има и по-добър начин да намерим реда от решения на системата неравенства, който използва разлагане в елементарни дроби. Разглеждаме отново

$$h(z) = \frac{1}{z} w(tz^3, uz^6, v/z) = \frac{1}{z(1 - tz^3)(1 - uz^6)(1 - v/z)}.$$

Представяме дробта като сума от елементарни дроби относно променливата z :

$$h(z) = \frac{1}{(1 - tv^3)(1 - uv^6)(z - v)}$$

$$+ \frac{uk(z)}{(u - t^2)(1 - uv^6)(1 - uz^6)} + \frac{t^3(v^2 + vz + z^2)}{(u - t^2)(1 - tv^3)(1 - tz^3)}$$

$$k(z) = v^2(t + uv^3) + (t + uv^3)vz + (t + uv^3)z^2 \\ + uv^2(1 + tv^3)z^3 + uv(1 + tv^3)z^4 + u(1 + tv^3)z^5.$$

Тъй като

$$\frac{1}{(z - v)} = \frac{1}{z(1 - v/z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{vz^2} + \frac{1}{v^2z^3} + \cdots,$$

тази дроб се развива в лоранов ред, съдържащ само отрицателни степени на z . Тогава $h_+(z)$ е сума от другите две дроби и след пресмятания получаваме

$$h_+(1) = g(t, u, v) = \frac{(1 + v + v^2)(t + u - tu(1 + v^3 + v^6) + uv^3)}{(1 - t)(1 - u)(1 - tv^3)(1 - uv^6)}.$$

Аналогично, за да обработим $g(t, u, v)$, ще отделим събираемите $t^p u^q v^n$, за които $n \geq 4p + 5q + 3$, тръгваме от

$$m(z) = \frac{1}{z^3} g(t/z^4, u/z^5, vz)$$

и отново отделяме неотрицателните степени на z в лорановото развитие на $m(z)$. Окончателно получаваме

$$y(t, u, v) = \frac{u^4 v^{23}}{(1 - uv^5)(1 - uv^6)(1 - tuv^9)} = \sum_{(p,q,n) \in T} t^p u^q v^n,$$

където T се състои от тройките (p, q, n) , за които n е броят на превозените автомобили, а p и q — на използваните малки и големи автобуси.

Симетрични функции и функции на Шур

Разглеждаме линейното пространство на формалните степенни редове на d променливи

$$\mathbb{C}[[T_d]] = \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_d]]$$

и неговото подпространство $\mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$ на степенните редове, които са симетрични функции: $f(T_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$, ако

$$f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(d)}) = f(t_1, \dots, t_d)$$

за всички субституции σ от симетричната група S_d .

Линейното пространство $\mathbb{C}[[T_d]]$ има естествена топологична структура (*топология на формалните степенни редове*), за която базисът от околности $\{\mathcal{U}_n \mid n \geq 1\}$ около нулата се състои от всички степенни редове, които нямат членове от степен $< n$. Тази топология се наследява от $\mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$. Като топологично линейно пространство $\mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$ има базис, който се състои от *функциите на Шур* $S_\lambda(T_d)$, където $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ е разбиване, т.е.

$$\lambda \in \mathbb{N}_0^d, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0.$$

$$S_{\lambda}(T_d) = \frac{V(\lambda + \delta, T_d)}{V(\delta, T_d)},$$

където

$$V(\mu, X) = \begin{vmatrix} t_1^{\mu_1} & t_2^{\mu_1} & \dots & t_d^{\mu_1} \\ t_1^{\mu_2} & t_2^{\mu_2} & \dots & t_d^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\mu_d} & t_2^{\mu_d} & \dots & t_d^{\mu_d} \end{vmatrix},$$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ и $\delta = (d-1, d-2, \dots, 2, 1, 0)$.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

За много задачи от различни области на алгебрата и комбинаториката е важно:

Ако е дадена симетрична функция $f(T_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$, да се намерят координатите ѝ спрямо базиса на Шур.

Ред на кратностите

Ако

$$f(T_d) = \sum_{\lambda} m_{\lambda} S_{\lambda}(T_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]^{S_d},$$

то *редът на кратностите* на $f(T_d)$ е

$$M(f; T_d) = \sum_{\lambda} m_{\lambda} T_d^{\lambda} = \sum_{\lambda} m_{\lambda} t_1^{\lambda_1} \cdots t_d^{\lambda_d}.$$

Това е производящата функция на “редицата” от кратностите на функциите на Шур в разлагането на $f(T_d)$.
(Сравни с първата идея на Елиот.)

Трудна задача

Ако е дадена симетричната функция $f(T_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$, да се намери редът на кратностите $M(f, T_d)$.

Пример. Ако

$$f(T_2) = \frac{1}{1 - (t_1 + t_2)},$$

то

$$M(f; T_2) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t_1 t_2}}{2t_1 t_2} \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4t_1 t_2}}{2t_1 t_2} t_1}.$$

Лема на Берел (Втора идея на Елиот)

Нека $f(T_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]^{S_d}$ е симетрична функция и нека

$$g(T_d) = f(T_d) \prod_{i < j} (t_i - t_j) = \sum_{r_i \geq 0} \alpha(r) t_1^{r_1} \cdots t_d^{r_d}, \quad \alpha(r) \in \mathbb{C}.$$

Тогава редът на кратностите на $f(T_d)$ е

$$M(f; T_d) = \frac{1}{t_1^{d-1} t_2^{d-2} \cdots t_{d-2}^2 t_{d-1}} \sum_{r_i > r_{i+1}} \alpha(r) t_1^{r_1} \cdots t_d^{r_d},$$

където сумирането е по всички $r = (r_1, \dots, r_d)$ такива, че $r_1 > r_2 > \cdots > r_d$.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Лесна задача

Ако е даден редът $h(T_d) = h(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}[[T_d]]$, то проверката, че това е редът на кратностите на симетричната функция $f(T_d)$ е елементарна: $h(T_d) = M(f; T_d)$ тогава и само тогава, когато

$$f(T_d) \prod_{i < j} (t_i - t_j) = \sum_{\sigma \in S_d} \text{sign}(\sigma) t_{\sigma(1)}^{d-1} t_{\sigma(2)}^{d-2} \cdots t_{\sigma(d-1)} h(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(d)}).$$

Пример

Ако

$$f(T_2) = \frac{1 + t_1^3 t_2^3}{(1 - t_1^2 t_2^2)(1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_1^2)(1 - t_1 t_2)(1 - t_2^2)} \times \\ \times \frac{1}{(1 - t_1^3)(1 - t_1^2 t_2)(1 - t_1 t_2^2)(1 - t_2^3)},$$

то (където $v = t_1 t_2$)

$$\begin{aligned}
 M(f; t_1 t_2) &= \frac{1}{(1 - v^2)(1 - v^3)^2} \times \\
 &\times \left(\frac{(1 + v^2 + v^4)((1 + v^2)(1 - t_1^2 v) + 2t_1 v(1 - v))}{3(1 - v)(1 - v^2)^3(1 - t_1)^2(1 - t_1^2)} + \right. \\
 &+ \frac{(1 - v)(1 + t_1 v)}{3(1 - v^2)(1 - t_1)(1 - t_1^2)} + \frac{(1 - v^2)(1 - t_1 v)}{3(1 - v^3)(1 - t_1^3)} - \\
 &\left. - \frac{v^3((1 - v + v^2)(1 - t_1^2 v^2) + t_1 v(1 - v^2))}{(1 - v)(1 - v^2)^2(1 - v^4)(1 - t_1)(1 - t_1^2)(1 - t_1 v)} \right).
 \end{aligned}$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Редът $f(T_2)$ е един от малкото намерени в явен вид редове на Хилберт на важни обекти в теорията на матричните инварианти и алгебрите с полиномни твърдения. (Това е редът на Хилберт на алгебрата на инвариантите на групата $GL_3(\mathbb{C})$, действаща чрез спрягане върху две матрици от трети ред.) Намиране на кратностите на функциите на Шур на такива редове е една от основните задачи в областта. Редът на кратностите беше намерен през 2002 г. без използване на метода на Елиот.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Реакция на рецензента

The general problem of determining such Hilbert series (or expressing them in a tractable way) is difficult and important, and has a moderately large literature.

The authors express the Hilbert series as the product of the Hilbert series of various symmetric algebras. This is a very interesting fact which deserves further investigation. The main results of the paper should be in the literature.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Unfortunately, the paper has the defect that it is so computational that it can no longer be read by a human the way papers used to be read. The paper could be published in its present form, but I would be much happier if it had a shorter, less computational presentation. It is not clear how, or if, this is possible, since many lengthy computations have already been omitted, but I think the authors should make an effort to write a more user-friendly paper.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Забележка

Проверката на резултата е тривиална и основните резултати можеха да се публикуват на една страница. Но ние се бяхме постарали на 24 страници да покажем как сме стигнали до тях.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Теорема на Берел (Трета идея на Елиот)

Ако $f(T_d)$ е хубава рационална симетрична функция, то нейният ред на кратностите $M(f; T_d)$ също е хубава рационална функция.

Следствие

Тогава редът на кратностите $M(f; T_d)$ може да се намери с алгоритмите на Елиот или Ксин.

Класическа теория на инвариантите

Групата $GL_d(\mathbb{C})$ от обратимите матрици от d -ти ред действа като група от линейни оператори върху линейното пространство $\mathbb{C}X_d$ с базис $X_d = \{x_1, \dots, x_d\}$. Това действие се продължава “диагонално” върху алгебрата $\mathbb{C}[X_d] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ на полиномите на d променливи по правилото

$$g(f(X_d)) = g(f(x_1, \dots, x_d)) = f(g(x_1), \dots, g(x_d)),$$

$$g \in GL_d(\mathbb{C}), f(X_d) \in \mathbb{C}[X_d].$$

Ако G е подгрупа на $GL_d(\mathbb{C})$, то множеството

$$\mathbb{C}[X_d]^G = \{f(X_d) \in \mathbb{C}[X_d] \mid g(f(X_d)) = f(X_d), g \in G\}$$

е подалгебра на алгебрата $\mathbb{C}[X_d]$, наречена *алгебра на G -инвариантите*.

$\mathbb{C}[X_d]^G$ е *градуирано* линейно пространство. Ако

$$f(X_d) = f_0(X_d) + f_1(X_d) + \cdots + f_k(X_d) \in \mathbb{C}[X_d]^G,$$

и $f_n(X_d)$ е хомогенната компонента от степен n на $f(X_d)$, то $f_n(X_d)$ е също G -инвариант. Тогава

$$\mathbb{C}[X_d]^G = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[X_d]_n^G,$$

е директна сума на своите хомогенните компоненти $\mathbb{C}[X_d]_n^G$ от степен n .

Редът

$$H(\mathbb{C}[X_d]^G, t) = \sum_{n \geq 0} \dim(\mathbb{C}[X_d]_n^G) t^n$$

се нарича *ред на Хилберт* (или *ред на Поанкаре*) на алгебрата $\mathbb{C}[X_d]^G$.

Теорема на Хилберт-Сер

Ако алгебрата $\mathbb{C}[X_d]^G$ е крайно породена, то нейният ред на Хилберт е хубава рационална функция.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Теорема на Еми Ньотер

Ако групата G е крайна, то алгебрата $\mathbb{C}[X_d]^G$ е крайно породена.

Теорема

Ако групата G е редуктивна (в някакъв смисъл “хубава”), то алгебрата $\mathbb{C}[X_d]^G$ е крайно породена.

(Въпреки, че не е формулирана в тази общност,
(неконструктивното) доказателство се съдържа в резултати на Хилберт от 1890 – 1893 год.)

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Формула на Молин

Ако групата G е крайна, то редът на Хилберт на $\mathbb{C}[X_d]^G$ е

$$H(\mathbb{C}[X_d]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gt)}.$$

Интегрална формула на Молин-Вайл

Ако групата G е безкрайна, заместваме сумата с интеграл.

Пример

Нека групата $SL_2(\mathbb{C})$ от матрици от втори ред с детерминанта 1 действа върху $(k+1)$ -мерното линейно пространство с базис $Y_{k+1} = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ по правилото: Ако

$$g(x_1^{k-j} x_2^j) = \sum_{i=0}^k \alpha_{ij} x_1^{k-i} x_2^i, \text{ то } g(y_j) = \sum_{i=0}^k \alpha_{ij} y_i.$$

Тогава редът на Хилберт на $\mathbb{C}[Y_{k+1}]^{SL_2(\mathbb{C})}$ е

$$H(\mathbb{C}[Y_{k+1}]^{SL_2(\mathbb{C})}, t) = 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi u) \prod_{j=0}^k \frac{1}{1 - e^{2\pi i(d-2j)u} t} du.$$

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Въпреки, че алгебрата $\mathbb{C}[Y_{k+1}]^{SL_2(\mathbb{C})}$ е крайно породена, от тази формула не е ясно, че редът на Хилберт е рационална функция, както следва от теоремата на Хилберт-Сер.

Типичен случай в класическата теория на инвариантите

Групата G е една от подгрупите на $GL_d(\mathbb{C})$:

- ▶ $UT_d(\mathbb{C})$ – унитриъгълната група (от горнотриъгълните матрици с единичен диагонал);
- ▶ $SL_d(\mathbb{C})$ – специалната линейна група;
- ▶ $O_d(\mathbb{C})$ – ортогоналната група (от матриците, за които транспонираната A^t и обратната A^{-1} съвпадат);
- ▶ $SO_d(\mathbb{C})$ – специалната ортогонална група (от ортогоналните матрици с детерминанта 1);
- ▶ $Sp_d(\mathbb{C})$, d четно – симплектичната група (от матриците, за които комплексно спрегнатата $\bar{A}^t$ и обратната A^{-1} съвпадат);

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Матрицата $g \in GL_d(\mathbb{C})$ действа върху линейното пространство с базис $Z_k = \{z_1, \dots, z_k\}$ като линеен оператор $\varphi(g)$ с матрица с елементи, които са полиномни функции на елементите на g .

Тогава алгебрата на инвариантите $\mathbb{C}[Z_k]^G$ е крайно породена. Класическите групи $SL_d(\mathbb{C})$, $O_d(\mathbb{C})$, $SO_d(\mathbb{C})$ и $Sp_d(\mathbb{C})$ са редуктивни и това следва от резултатите на Хилберт. За групата $UT_d(\mathbb{C})$ това е теорема на Вайценбък.

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Как да пресметнем реда на Хилберт на алгебрата $\mathbb{C}[Z_k]^G$?

Оказва се, че на действието на $GL_d(\mathbb{C})$ върху линейното пространство с базис Z_k можем да съпоставим ред на Хилберт, който е симетричен полином с неотрицателни цели коефициенти

$$H(\mathbb{C}Z_k, T_d) = \sum a_p t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d}.$$

Разглеждаме реда

$$H(\mathbb{C}[Z_k], T_d; u) = \prod \frac{1}{(1 - t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d} u)^{a_p}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda} m_{\lambda}(n) S_{\lambda}(t_1, \dots, t_d) u^n,$$

който е хубава симетрична функция на d променливи T_d . С алгоритъма на Елиот или Ксин намираме реда на кратностите $M(H(\mathbb{C}[Z_k], T_d, u); T_d)$, който по теоремата на Берел е хубав степенен ред на T_d и u .

Ако разглеждаме $M(H(\mathbb{C}[Z_k], T_d, u); T_d)$ като ред на u ,

$$M(H(\mathbb{C}[Z_k], T_d, u); T_d) = f(t_1, \dots, t_d; u) = \sum_{n \geq 0} f_n(T_d) u^n,$$

$$f_n(T_d) = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(n) T_d^{\lambda}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d),$$

то коефициентите $f_n(T_d)$ пред u^n са полиноми на T_d .

Теорема

В горните означения редовете на Хилберт на алгебрите $\mathbb{C}[Z_k]^{UT_d(\mathbb{C})}$ и $\mathbb{C}[Z_k]^{SL_d(\mathbb{C})}$ са

$$H(\mathbb{C}[Z_k]^{UT_d(\mathbb{C})}, u) = f(1, \dots, 1; u) = \sum_{n \geq 0} f_n(1, \dots, 1) u^n,$$

$$H(\mathbb{C}[Z_k]^{SL_d(\mathbb{C})}, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda_1 = \dots = \lambda_d} m_\lambda(n) u^n.$$

Подобни формули са в сила и за групите

$$O_d(\mathbb{C}), SO_d(\mathbb{C}), Sp_d(\mathbb{C}).$$

Некомутативна теория на инвариантите

С какво заместваме полиномната алгебра $\mathbb{C}[X_d]$?

Свойства на алгебрата $\mathbb{C}[X_d]$:

- ▶ Действието на $GL_d(\mathbb{C})$ върху $\mathbb{C}X_d$ се продължава “диагонално” върху цялата алгебра.
- ▶ Тя е градуирано линейно пространство.
- ▶ Тя има универсално свойство: За всяка комутативна алгебра R всяко изображение $\pi_0 : X_d \rightarrow R$ се продължава до хомоморфизъм $\pi : \mathbb{C}[X_d] \rightarrow R$.

Оказва се, че ако алгебрата, която ще играе ролята на $\mathbb{C}[X_d]$, е минимална сред алгебрите, удовлетворяващи третото свойство, то тя ще удовлетворява и другите две свойства.

Примери

- ▶ Свободната асоциативна алгебра $\mathbb{C}\langle X_d \rangle$ – алгебрата на полиномите на d некомутиращи променливи.
- ▶ Абсолютно свободната алгебра $\mathbb{C}\{X_d\}$ – алгебрата на полиномите на d некомутиращи променливи, които не удовлетворяват и асоциативния закон, т.е. $(uv)w \neq u(vw)$.

Много от свойствата от класическата теория на инвариантите се губят за $\mathbb{C}\langle X_d \rangle^G$ и $\mathbb{C}\{X_d\}^G$

Нека $d = 2$ и $G = UT_2(\mathbb{C})$. Тогава редовете на Хилберт на $\mathbb{C}\langle X_2 \rangle^G$ и $\mathbb{C}\{X_2\}^G$ не приличат на редовете на Хилберт на $\mathbb{C}\langle X_2 \rangle$ и $\mathbb{C}\{X_2\}$:

$$H(\mathbb{C}\langle X_2 \rangle, t_1, t_2) = \frac{1}{1 - (t_1 + t_2)}, \quad H(\mathbb{C}\langle X_2 \rangle^G, t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{2t - \sqrt{1 - 4t^2}},$$

$$H(\mathbb{C}\{X_2\}, t_1, t_2) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(t_1 + t_2)}}{2},$$

$$H(\mathbb{C}\{X_2\}^G, t) = \int_0^1 \cos^2(\pi u) \left(1 - \sqrt{1 - 8\cos(2\pi u)}\right) du$$

и това е елиптичен интеграл.

Хубав клас от асоциативни, но некомутативни алгебри

Нека I е идеал на $\mathbb{C}\langle X_d \rangle$, който издържа всички ендоморфизми на $\mathbb{C}\langle X_d \rangle$, т.е. ако $f(x_1, \dots, x_d) \in I$ и $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{C}\langle X_d \rangle$, то $f(u_1, \dots, u_d) \in I$. Такива идеали се наричат Т-идеали и се състоят от всички полиномни твърдения на някаква алгебра R . Алгебрата

$$F_d(R) = \mathbb{C}\langle X_d \rangle / I$$

е градуирана, издържа желаното действие на $GL_d(\mathbb{C})$ и нейният ред на Хилберт $H(F_d(R), T_d)$, необходим за пресмятане в теория на инвариантите на класическите групи, е хубава рационална функция (Теорема на Белов).

Въведение – Chicken McNuggets

Фробениус и Силвестър

Производящи функции и теорема на Шур

Една диофантова транспортна задача от 2016 година

Методът на Елиот от 1903

Решение на транспортната задача през 1903 година

Симетрични функции и функции на Шур

Класическа теория на инвариантите

Некомутативна теория на инвариантите

Заклучение

За алгебрите $F_d(R)$ са в сила много от резултатите от класическа теория на инвариантите.

За детайли (към 2012 година) виж

F. Benanti, S. Boumova, V. Drensky, G.K. Genov, P. Koev,
Computing with rational symmetric functions and applications to invariant theory and PI-algebras, Serdica Math. J. **38** (2012), Nos 1-3, 137-188.

<http://www.math.bas.bg/serdica/2012/2012-137-188.pdf>