

Задачи за конкурса на сп. Математика ученици 8-12 клас, брой 5/2007

Задача 1. Дадени са реални неотрицателни числа a и b , за които $ab \geq a^3 + b^3$. Да се докаже, че

а) $a + b \leq 1$;

б) $\frac{1}{4} \geq ab \geq a + b - \frac{3}{4}$.

Задача 2. Точките A , B , C и D лежат на една права. За произволна точка X означаваме с Y втората пресечна точка на описаните около $\triangle XAB$ и $\triangle XCD$ окръжности. Да се докаже, че правите XY минават през постоянна точка.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такива, че $f(2) \leq 4$, $f(m) \leq f(n)$ и $f(mn) = f(m)f(n)$ за произволни $m \leq n$.