ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ УМ+

Конкурс 2005/2006 г.

Задачи за 4 клас

Задача 1. Готвач трябва да вари едно яйце точно 15 минути. Той обаче няма обикновен часовник, за да измери времето, а разполага с два пясъчни часовника, единият от които отмерва точно 19 минути, а другият отмерва точно 23 минути. Помогнете на готвача да свари яйцето!

Задача 2. Да се реши числовият ребус, ако на еднаквите букви отговарят еднакви цифри и на различните букви отговарят различни цифри:

Н О В И Н И

+

С Т А Т И И

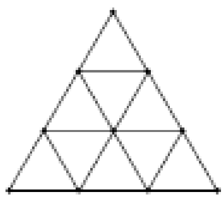
В Е С Т Н И К

Задача 3. Дължините на страните на правоъгълник са различни прости числа, а обиколката на правоъгълника е 28см. От правоъгълника е изрязан квадрат, който има общ връх с правоъгълника и дължината на страната му е просто число. Да се намерят обиколката и лицето на получената фигура.

Задача 4. Един ученик посетил Рим и направил снимка на Колизеума. След това пътувал до Париж и снимал Айфеловата кула. Накрая отишъл в Лондон и направил чудесна снимка на Биг Бен. Когато се върнал у дома, ученикът поставил надписи на гърба на снимките: на едната написал “Париж”, на втората – “Не е Айфеловата кула”, а на третата – “Не е Колизеумът”. Когато обърнал снимките, видял, че само един от надписите е верен. От кой град е първата снимка? Какво се вижда на втората и какво на третата снимка? Обосновете отговора си!

Задача 5. Разликата на едно четирицифрено и едно трицифрено число е 8002, а сборът им е петцифрено число. Да се намерят числата.

Задача 6. Пепи конструирал триъгълна мрежа от кибритени клечки, разделяща равностранен триъгълник на равностранни триъгълници със страна една кибритена клечка. Например:



Мрежата на Пепи съдържала 484 малки триъгълници.

А) Колко клечки е употребил Пепи?

Б) Ако във всяка кибритена кутия има по 50 клечки, то колко най-малко кибритени кутии е “изхабил” Пепи?

Задача 7. Томи, Аника и господин Нилсон решили да изненадат Пипи, като ѝ подарили 14 бонбона. Томи ѝ подарил два пъти по-малко бонбони от господин Нилсон, а Аника повече от Томи, но по-малко от господин Нилсон. Колко бонбона е подарил всеки?

Задача 8. Един ден в $4^а$ клас учителката раздала 779 еднакви квадратчета. На първия ученик дала няколко квадратчета,а на всеки следващ давала с 2 квадратчета повече. Колко са били учениците в $4^а$ клас този ден и по колко квадратчета е получил всеки?

Колко от учениците могат да направят по-големи квадрати (може повече от един), използвайки всичките си квадратчета? Покажете как!

Задача 9. Правоъгълник със страни цели числа може да бъде разрязан на 12 еднакви квадрата. Лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е равно на най-малкото трицифрено число, което се дели на 9. Върху всяка от страните му навън са построени равностранни триъгълници. Намерете обиколката на получената фигура.

Задача 10. На няколко картички от двете страни Иван е написал по една цифра така, че всяка цифра е написана поне по веднъж и разликата на всеки две цифри, написани на една картичка, е 1. Той установил, че е надписал възможно най-големия брой различни картички, а като подреждал картичките една до друга, получавал различни числа.

а)Кое е възможно най-малкото число с четни цифри, което може да получи Иван с всички картички?

б) Колко различни числа само с четни цифри може да се запишат с тези картички? (Използват се всички.)

в) Кои числа са повече, тези само с четни или тези само с нечетни цифри, записани отново с всички картички?

Задачи за 5 клас

Задача 1. Разполагаме с два празни съда с вместимости 14 литра и 11 литра, както и с неограничено количество вода. Как да премерим точно 1 литър вода?

Задача 2. Има ли такива двуцифрени естествени числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, за които:

а) $НОК\left(\overline{ab},\overline{cd}\right)=\overline{abcd}$;

б) $НОК\left(\overline{ab},\overline{cd}\right)=a\cdot b\cdot c\cdot d$?

Задача 3. Правоъгълникът на чертежа е разрязан на девет по-малки правоъгълника с разрези, успоредни на страните му.Числата, записани в някои от по-малките правоъгълници, показват съответните им лица.Да се намери лицето на правоъгълника, в който е поставен въпросителният знак.

?		18
	32	8
18	24	

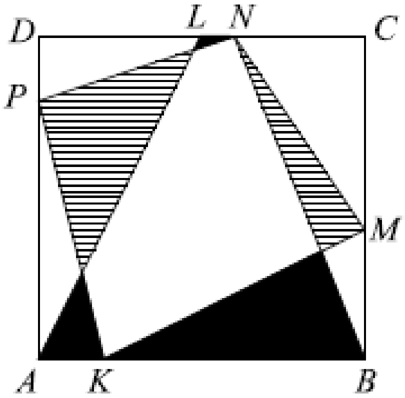
Задача 4. Ани,Биляна,Валя,Галя,Диана и Елена тръгнали на екскурзия. Първия ден на една седалка в автобуса седели Ани и Огнянова, на друга – Биляна и Николова, а най-отзад – Галя и Елена. На следващия ден Диана седнала до Колева, Биляна и Огнянова слушали заедно музика, а Маринова седнала до Елена. Екскурзията завършила с поход до връх Шипка. Първа на върха пристигнала Биляна, след нея заедно дошли Галя и Маринова,зад тях се движела Диана, а последни изкачили върха Валя и Лилкова. Ако знаете,че Петрова и Лилкова са приятелки, посочете кое момиче каква фамилия носи. Обосновете отговора си.

Задача 5. Броят на ябълките, които набрахме тази есен от нашето дърво, се дели на13. След като изядохме 6 ябълки, забелязах, че останалите можем да разделим на 2, на 3, на 4 и на 5 без остатък. Колко ябълки сме набрали,ако броят им е по-голям от 500, но по-малък от 700?

Задача 6. Правоъгълник с обиколка 14 дм е разделен на 4 квадрата. Да се определи в квадратни сантиметри лицето на този правоъгълник.

Задача 7. Томи и Аника купили подаръци за рождения ден на Пипи и решили да ги опаковат. Томи опаковал един подарък и се оказало, че е изразходил 120 см лента. Същото направила и Аника, но на нея ѝ трябвало 150 см лента. Ако е известно, че двамата разполагали с 34,8 м лента, колко най-много подаръци са могли да опаковат?

Задача 8. Квадратът $ABCD$ е със страна 5 см. Върху страните му са взети точки K, M, N и P (както е показано на чертежа) такива, че $AK = 1\,cm, BM = 2\,cm, CN = 2\,cm$ и $DP = 1\,cm$. Точка L от DC е такава, че $DL = 2\,cm$. Докажете, че лицето на защрихованата част е равно на лицето на тъмната част.



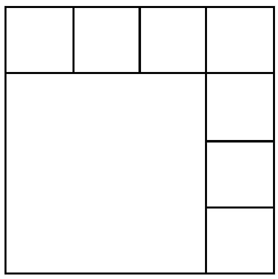
Задача 9. На мястото на звездичките поставете цифри, така че

а) числото $\overline{4*5*8*3*}$ да се дели на 36;

б) числото $\overline{5*8*43**}$ да се дели на 33.

Кои са повече, числата от а) или от б)?

Задача 10. По-колко различни начина могат да се разположат числата от 1 до 8 в квадратите на картинката (във всеки по едно) така, че да няма съседни квадрати, разликата от числата в които да е по-голяма или равна на 4? (Съседни са квадратите, които имат повече от една обща точка.)



Задачи за 6 клас

Задача 1. Един милионер поставил електрическа ключалка на своя сейф.Той подредил 6 лампи една до друга, номерирани последователно,като всяка лампа имала собствен ключ. Първата лампа можела винаги да се включва и изключва. За останалите ключове имало условие. Всеки от тях задействал (т.е. включвал и изключвал) отговарящата му лампа само когато съседната на нея лампа с по-малък номер била запалена, а останалите лампи с по-малки номера били изгасени. Сейфът се отварял, когато били включени и шестте лампи. Ако един ход (светване или изгасване) се осъществява за една секунда, за колко време милионерът ще отвори сейфа си?

Задача 2. Да се намери най-малкото естествено число, чието частно със сбора от цифрите му е:

а) 2005;

б) 2006.

Задача 3. Съществува ли цяло число k, за което $2006^k + 2$ е:

а) квадрат на цяло число;

б) сбор от квадратите на три цели числа?

Задача 4. На брега на голямо кръгло езеро има няколко града. Известно е, че два града са свързани с път точно когато двата съответно следващи след тях, разположени по посока обратна на часовниковата стрелка, не са свързани помежду си. Възможно ли е градовете да бъдат:

а) 4;

б) 2005.

Задача 5. Възможно ли е разликата между естественото число A и числото, записано с цифрите на A в обратен ред, да бъде квадрат на естествено число?

Задача 6. Преди да отиде на бал мащехата на Пепеляшка изсипала на пода по един килограм боб, леща и грах и заповядала на Пепеляшка да ги събере. Знае се, че отношението на броя на зърната в 1 кг грах към броя на зърната в 1 кг леща е 6:13, а броят на бобените зърна е $20\frac{5}{6}\%$ от броя на всички зърна. Пресметнете по колко зърна от всеки вид е имало на пода, ако общият брой на зърната е 2400.

Задача 7. Да се докаже, че $\frac{1}{5} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} < \frac{2}{5}$.

Задача 8. Основата на пирамида е трапец, на който дължините в сантиметри на малката основа, на височината и на голямата основа се изразяват чрез първите три нечетни прости числа. Обемът на пирамидата е не по-малък от 100 куб. см. и по-малък от 140 куб. см. Да се намери височината на пирамидата, ако дължината ѝ в сантиметри е просто число.

Задача 9. Има ли три различни естествени числа, такива че сборът на всеки две от тях да е равен на степен на числото

а) 3;

б) 2?

Задача 10. Колко шестцифрени числа от вида $\overline{abcacb}$ се делят на 23?

Задачи за 7 клас

Задача 1. Докажете, че всяко двоично число, което се състои само от единици, не може да бъде точна степен на естествено число(точен квадрат, точен куб и т.н).

Задача 2. Измеренията в сантиметри на правоъгълен паралелепипед са три различни прости числа. Сборът от дължините (пак в сантиметри) на всички ръбове на паралелепипеда е двуцифрено число, което се дели на 8 и е по-малко от 80, а обемът му (в кубически сантиметри) е трицифрено число. Да се намерят лицето на повърхнината и обемът на паралелепипеда.

Задача 3. Да се намерят всички двойки естествени числа, които са дължини на страни на квадрати, за които:

а) разликата от лицата им е 2005;

б) сумата от лицата им е 2005.

Задача 4. На брега на голямо кръгло езеро има няколко града. Известно е, че два града са свързани с път точно когато двата съответно следващи след тях, разположени по посока обратна на часовниковата стрелка, не са свързани помежду си. Докажете, че от всеки град до всеки град може да се стигне с не повече от две прекачвания.

Задача 5. Да се намерят всички двойки естествени числа p и q ,само едното от които е просто и $p^4+2005q^2=q^4+2005p^2$.

Задача 6. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 см са дадени точките $A(0;5), B(3;2)$ и $C(5;6)$. Ако точка $M \in BA$ и $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{3}$, а точка $N \in BC$ и $\frac{BN}{BC}=\frac{2}{3}$, намерете лицето на триъгълник BMN .

Задача 7. Кое число е по-голямо: $1{,}1^{100}$ или 1000? Отговорът да се обоснове.

Задача 8. Нека a, b, c и d са произволни числа от интервала [2005; 2006]. Да се докаже, че

$-1 \le ab-bc+cd-da \le 1$.

Задача 9. В триъгълник ABC ъглите $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ се отнасят съответно както10 :3 : 5. Върху симетралата на страната BC са взети точки P и Q (Q и A са в една полуравнина относно BC), така че $AP=AQ=AC$. Докажете, че ΔACP и ΔBCQ са равностранни.

Задача 10. Да се намерят всички естествени числа, които са равни на сбора от три техни различни делители.