Основен вариант за 10 – 12 клас

Задача 1. *(4 точки)* На графиката на полином $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, чиито коефициенти $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ са цели числа, са отбелязани две точки с целочислени координати. Докажете, че ако разстоянието между тези две точки е естествено число, то съединяващата ги отсечка е успоредна на абсцисната ос.

Решение: Ще отбележим първо, че единствените цели решения на уравнението $a^2 + 1 = b^2 \iff (b-a)(b+a) = 1$ се получват при $b + a = b - a = \pm 1$ и са $b = \pm 1, a = 0$.

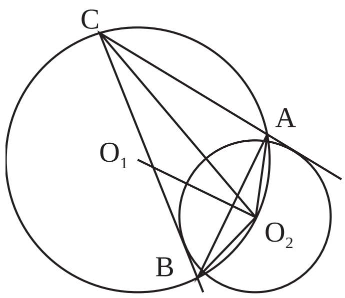
Нека абсцисите на дадените точки с целочислени координати са x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, а точките са $A_i(x_i, a_nx_i^n + \cdots + a_1x_i + a_0), i = 1, 2$. Разстоянието между тях е равно на

$A_1A_2 =$
$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a_nx_2^n + \cdots + a_1x_2 + a_0 - (a_nx_1^n + \cdots + a_1x_1 + a_0))^2} =$
$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + (a_n(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) + \cdots + a_1)^2} =$
$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + M^2}$.

Тъй като $x_2^k - x_1^k = (x_2 - x_1)(x_2^{k-1} + x_2^{k-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{k-2} + x_1^{k-1})$ за всяко естествено k, а коефициентите $a_n, \ldots, a_1$ и x_1, x_2 са цели числа, то M е цяло число. Следователно за да бъде A_1A_2 естествено число, трябва естественото число $1 + M^2$ да е точен квадрат, т.е. където $1 + M^2 = d^2$, където d е естествено число. От направената в началото забележка следва, че $M = 0$, т.е. $a_nx_2^n + \cdots + a_1x_2 + a_0 = a_nx_1^n + \cdots + a_1x_1 + a_0$, което трябваше да се докаже.

Задачата е решена от **Димитър Илиев, Владислав Петков и Пламен Траянов от НПМГ, Тихомир Семов, Мирослав Михов и Владислав Симеонов от Русе**.

Задача 2. *(5 точки)* Окръжност W_1 минава през центъра на окръжността W_2. От точка $C \in W_1$ са построени допирателните към W_2, които пресичат за втори път W_1 в точките A и B. Докажете, че отсечката AB е перпендикулярна на централата на двете окръжности.



Фигура 1:

Решение: Да означим с O_1 и O_2 центровете съответно на W_1 и W_2. Тъй като CA и CB са допирателни към W_2, то имаме $\sphericalangle ACO_2 = \sphericalangle BCO_2$, откъдето са равни

съответните на тези ъгли дъги $\overset{\frown}{AO_2} = \overset{\frown}{BO_2}$ и хорди $AO_2 = BO_2$. Освен това $AO_1 = BO_1$ и можем да заключим, че централата O_1O_2 е симетрала на AB, откъдето твърдението на задачата следва.
Всички участници, избрали да решават задачите от Основния вариант на Турнира, са се справили с тази задача.

Задача 3. *(5 точки)* Виж задача 6 от Основния вариант за 7.– 9. клас.

Задача 4. *(6 точки)* Съществува ли такава квадратна функция $f(x)$, при която уравнението $\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n}(x))\ldots)) = 0$ има точно 2^n различни реални корени за всяко естествено число n?

Решение: Ще докажем, че една от квадратните функции, удовлетворяващи условието, е $f(x) = 2x^2 - 1$ (друга подходяща е $f(x) = x^2 - 2$).
Ясно е, че ако за някое c значението $f(c) \in (-1, 1)$, то $c \in (-1, 1)$. За удобство да означим $f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Ще докажем с индукция по n, че ако $-1 < c < 1$, то уравнението $f_n(x) = c$ има точно 2^n корени в интервала $(-1, 1)$.
При $n = 1$ твърдението е очевидно (по графиката). Нека твърдението е доказано за $n = k$; ще го докажем за $n = k + 1$. При $-1 < c < 1$ имаме

$$f_{k+1}(x) = c \iff f(f_k(x)) = c \iff f_k(x) = a \cup f_k(x) = b,$$

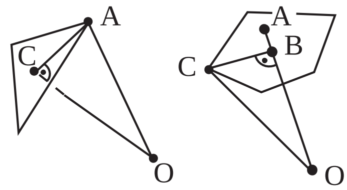
където $-1 < a < 1$ и $-1 < b < 1$ са корените на $f(x) = c$. Всяко от последните две уравнения според индукционното предположение има по 2^k корени в интервала $(-1, 1)$, следователно уравнението $f_{k+1}(x) = c$ има точно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ корена в интервала $(-1; 1)$. Остана да отбележим, че степента на многочлена $f_{k+1}(x)$ е 2^{k+1} и следователно той има не повече от 2^{k+1} корена, т.е. получихме всички негови корени.

Задачата е решена от **Георги Ставрев от Бургас, Александър Биков от НПМГ**.

Задача 5. *(7 точки)* Икосаедър и додекаедър са вписани в една и съща сфера. Докажете, че те са описани около една и съща сфера. (Напомняме, че икосаедърът има 20 еднакви стени с форма на равностранен триъгълник, във всеки връх се събират 5 стени и ъглите между съседните стени са равни; додекаедърът има 12 еднакви стени с форма на правилен петоъгълник, във всеки връх се събират по 3 стени и ъглите между съседните стени са равни.)

Решение: Ключов при решението на задачата е фактът, че икосаедърът и додекаедърът са двойствени едно на друго тела: центровете на стените на икосаедър са върхове на додекаедър и обратно, центровете на стените на додекаедър са върхове на икосаедър. (Аналогична задача може да се постави за всеки два двойствени многостена, например за куб и октаедър.)
Нека O е центърът на описаната около икосаедъра сфера, C е център на една от стените му, а A е един от върховете на тази стена. Тогава радиусът на описаната около икосаедъра сфера е $R_I = OA$, а на вписаната – $r_I = OC$.

Да разледаме додекаедъра, който се получава, като свържем центровете на стените на икосаедъра. Точка C е връх на три стени на този додекаедър, а центърът B на една от тях лежи на OA. Радиусът на описаната около този додекаедър сфера е $R_D = OC$, а на вписаната в него – $r_D = OB$. Тъй като $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB$ и $\sphericalangle OCA =$



Фигура 2:

$90^\circ = \sphericalangle OBC$, триъгълниците OAC и OCB са подобни и оттук $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OC}{OB}$, т.е.

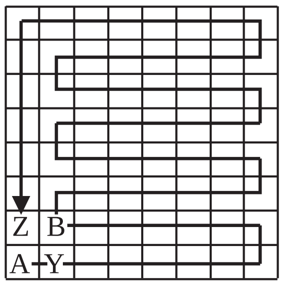
$$\frac{R_I}{r_I} = \frac{R_D}{r_D}.$$

Последното всъщност означава, че отношението на радиуса на описаната и радиуса на вписаната сфери е едно и също при икосаедрите и додекаедрите.
Оттук директно следва твърдението на задачата: ако икосаедър и додекаедър са вписани в една сфера, то $R_I = R_D$, следователно $r_I = r_D$, т.е. двете тела са описани около една и съща сфера.

Задачата е решена от **Димитър Илиев, Юлен Добрев и Пламен Траянов от НПМГ, Калоян Стойчев, Мирослав Пенчев и Владислав Симеонов от Русе**.

Задача 6. *(7 точки)* Нека A е ъглово поле на шахматна дъска, а B е съседното му по диагонал поле. Докажете, че броят на различните маршрути, тръгващи от A, които "куц" топ може да избере за да посети точно по веднъж всички полета на дъската, е по-голям от броя на различните маршрути на "куция" топ, тръгващи от B и обхождащи по веднъж всички полета на дъската. (За един ход "куц" топ преминава в съседно на своето поле в хоризонтално или вертикално направление.)

Решение: Идеята на решението е следната: на всеки обхождащ маршрут на куция топ, започващ от B, ще съпоставим обхождащ маршрут на куция топ, започващ от A (като на различни маршрути съответстват различни). Това ще означава, че маршрутите от A са не по-малко от маршрутите от B. За да докажем, че маршрутите от A са повече, е достатъчно да намерим обхождащ маршрут на куция топ, започващ от A, който не е съпоставен на нито един обхождащ маршрут на куция топ, започващ от B.
Ето как тази идея може да се реализира.
Тъй като полетата A и B са едноцветни при стандартно шахматно оцветяване и по пътя на куция топ се редуват бели и черни полета, то няма маршрут, започващ в B и завършващ в A (или обратно). Тогава всеки маршрут, започващ от B, минава през A по един от следните два начина – YAZ или ZAY.



Фигура 3:

Разглеждаме следното съответствие:

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}YAZ\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AY\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на } (1)}BZ\underbrace{\ldots}_{(2)};$$

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}ZAY\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AZ\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на } (1)}BY\underbrace{\ldots}_{(2)}.$$

При това съответствие на всеки маршрут от B се съпоставя (различен) маршрут от A. Остана да забележим, че по този начин на нито един маршрут от B не се съпоставя маршрут от A, завършващ в Y или Z, какъвто е например показаният на фигура 3. Така твърдението е доказано.

Задачата е решена от **Георги Ставрев от Бургас, Вихрен Линдров и Владислав Петков от НПМГ**.

Задача 7. *(8 точки)* В пространството са дадени 200 точки. Всеки две от тях са свързани с отсечка, като никои две отсечки не се пресичат във вътрешни точки. Всяка отсечка е оцветена в един от k на брой цвята. Петър иска да оцвети дадените 200 точки в същите цветове така, че никои две точки да не бъдат едновременно оцветени в цвета на свързващата ги отсечка. Винаги ли е възможно това, ако
а) (4 точки) $k = 7$?
б) (4 точки) $k = 10$?

Решение: а) Ще докажем по индукция, че ако броят на цветовете е n, а броят на точките е не по-малък от 2^n, то съществува оцветяване на отсечките, при което Петър не може да постигне своята цел.
При $n = 1$ твърдението е очевидно. Нека то е доказано за $n - 1$ цвята; ще го докажем за n. Да разделим точките в две множества, всяко от които се състои от не по-малко от 2^{n-1} точки. Във всяко от множествата да оцветим отсечките в $n - 1$ цвята в съответствие с индукционното предположение. Всички отсечки, свързващи точки от различни множества, оцветяваме в оставащия (нов) цвят. Нека Петър е оцветил по някакъв начин всички точки. Ако в някое от двете множества няма точки, оцветени в новия цвят, то търсената отсечка съществува според индукционното предположение. Ако и в двете множества има поне по една точка, оцветена в новия цвят, то свързващата тези точки отсечка е търсената.

б) Ще докажем, че отсечките, свързващи 121 точки, могат да бъдат оцветени така, че Петър да не може да постигне целта си. Да означим точките с двойки числа (a, b), където a и b са числа от 1 до 11. При $k = 0, ..., 9$ отсечките между точките от вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), където $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1)$ се дели на 11, оцветяваме в цвят $k + 1$. Избираме произволен цвят. Ако две точки са свързани с трета с отсечки от този цвят, то свързващата ги отсечка е от същия цвят. По такъв начин точките се разбиват на няколко множества така, че всички отсечки между точките от едно множество са оцветени в избрания цвят. При това за всеки $a_1, b_1, b_2 (b_2 \neq b_1)$ съществува точно едно a_2, за което отсечката между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) е оцветена в дадения цвят. Затова всеки цвят поражда разбиване на точките в 11 множества с по 11 точки във всяко. Оставащите отсечки оцветяваме по произволен начин.
Както и да оцветява Петър точките, съществуват 12 едноцветни точки. Да разгледаме разбиването на 11 множества, съответстващо на този цвят. Има две точки, попадащи в едно и също множество и свързващата ги отсечка е търсената.
В задачата са дадени 200 точки. Избираме от тях 121 и както и да постъпи Петър, още сред тях ще се намери търсената отсечка.