Тренировъчен вариант за 10 – 12 клас

Задача 1. *(3 точки)* В една координатна система са построени четири графики на функции от вида $y = x^2 + ax + b$, където a и b са дадени коефициенти. Графиките имат точно четири пресечни точки, във всяка от които се пресичат точно две графики. Докажете, че сборът от най-малката и най-голямата абсциси на пресечни точки е равен на сборът от абсцисите на другите две пресечни точки.

Решение: Забелязваме, че графиките $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ се прсичат тогава и само тогава, когато се пресичат графиките $y = ax + b$ и $y = cx+d$, при това абсцисите на пресечните точки са едни и същи (тъй като $x^2+ax+b = x^2+cx+d \iff ax+b = cx+d$). Затова вместо да разглеждаме пресичането на параболите $y = x^2 + a_ix + b_i, i = 1..4$, можем да разгледаме пресичането на съответните им прави $y = a_ix + b_i, i = 1..4$. Лесно се вижда, че четири прави имат точно четири пресечни точки само когато са две по две успоредни. Пресечните точки лежат във върховете на успоредник. Точките с най-голяма и най-малка абсциса са противоположни върхове на успоредника. Полусборът на абсцисите на два срещуположни върха на успоредника е равен на абсцисата на средата на свързващия ги диагонал. Тъй като двата диагонала имат обща среда, твърдението е доказано.

Задачата е решена от **Полина Керчева от Русе**.

Задача 2. *(4 точки)* Естествените числа са записани в редица (без интервали между тях): 1234567891011 . . .. Започвайки от ляво, тази редица е разделена на части с дължина по седем цифри. Докажете, че за всяко седемцифрено естествено число
а) (3 точки) съществува поне една част, на която то е записано;
б) (1 точка) съществуват безкрайно много части, на които то е записано.

Решение: а) Ще докажем, че се среща част, на която е записано произволно 7-цифрено число $\overline{a_1a_2\dots a_7}$. Да разгледаме следната част от редицата

$$(\star)\qquad a_1a_2\dots a_70a_1a_2\dots a_71a_1a_2\dots a_72\dots a_1a_2\dots a_76,$$

получена при записване на 7 поредни 8-цифрени числа. При разделянето на $(\star)$ на части с дължина по 7 цифри всяко от тези 8-цифрени числа ще бъде разрязано. Ако в първото от разглежданите 8-цифрени числа отляво на разреза има 7 цифри, тези цифри образуват точно $\overline{a_1a_2\dots a_7}$. Ако в първото число отляво на разреза има $k < 7$ цифри, то в следващото от разглежданите 8-цифрени числа отляво на разреза има $k - 1$ цифри и т.н. Следователно от числото $\overline{a_1a_2\dots a_7k}$ ще се отреже точно частта $\overline{a_1a_2\dots a_7}$.
б) Разгледаната в а) част от редицата $(\star)$ се среща безкраен брой пъти като начало на "много дълги" числа, и при всяко нейно появяване се изрязва частта $\overline{a_1a_2\dots a_7}$.

Задачата е решена от **Емил Ибришимов от Стара Загора**.

Задача 3 и 4. *(по 4 точки)* Виж задачи 4. и 5. от Тренировъчния вариант за 7.-9. клас.

Задача 5. *(5 точки)* Сборът на няколко положителни числа е равен на 10, а сборът от квадратите им е по-голям от 20. Докажете, че сборът от третите степени на тези числа е по-голям от 40.

Решение: Нека дадените числа са $a_1, a_2, \dots, a_k$, като $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 10$ и $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 > 20$. От неравенството на Коши-Буняковски

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k)^2$$

при $x_i = \sqrt{a_i}$, $y_i = \sqrt{a_i^3}$ за $i = 1, \dots, k$ получаваме

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3) \geq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)^2 > 20^2,$$

т.е. $10(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3) > 400$, откъдето твърдението следва.

Задачата е решена от **Николай Костов от АК София**.