Основен вариант за 7 – 9 клас

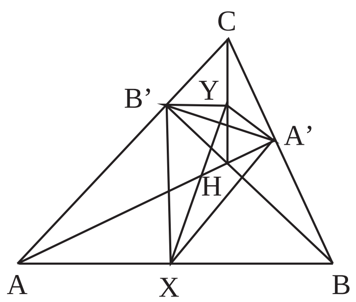
Задача 1. *(4 точки)* На графиката на квадратна функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, чиито коефициенти a, b и c са цели числа, са отбелязани две точки с целочислени координати. Докажете, че ако разстоянието между тези две точки е естествено число, то съединяващата ги отсечка е успоредна на абсцисната ос.

Решение: Задачата е частен случай на задача 1. от Основния вариант за 10. – 12. клас.

Задачата е решена от **Петър Георгиев, Галин Статев, Тодор Биларев, Николай Димитров, Адриан Андреев и Никола Чипев от НПМГ, Славина Китова, Виктор Константинов и Владимир Сотиров от АК София**.

Задача 2. *(5 точки)* Височините AA' и BB' в триъгълника ABC се пресичат в точка H. Точките X и Y са среди съответно на отсечките AB и CH. Докажете, че правите XY и $A'B'$ са перпендикулярни.

Решение: Всички участници, избрали да решават задачите от Основния вариант на Турнира, са се справили с тази (известна седмокласна) задача.



В правоъгълните триъгълници $CB'H$ и $CA'H$ медианите към общата хипотенуза CH са равни, $B'Y = A'Y = \dfrac{CH}{2}$. Също, в правоъгълните триъгълници ABB' и ABA' медианите към общата хипотенуза AB са равни, $B'X = A'X = \dfrac{AB}{2}$. Следователно XY е симетрала на $A'B'$, откъдето твърдението на задачата следва.

Задача 3. *(5 точки)* На циферблата на точния часовник на барон Мюнхаузен няма никакви цифри и деления, а само три стрелки, показващи часа, минутите и секундите. Баронът твърди, че по своя часовник може точно да определи времето през деня (от 8:00 до 19:59), тъй като взаимното разположение на стрелките в този период не се повтаря. Прав ли е баронът? (Стрелките са с различна дължина и се движат равномерно.)

Решение: Ще докажем, че баронът е прав. Да допуснем, че едно и също положение на стрелките се повтаря в рамките на един ден и нека между два такива момента е минало време t, по-малко от 12 ча́са. Ясно е, че във всеки момент разположението на стрелките е същото, както след време t. В 12 часа́ и трите стрелки съвпадат, следователно и в $12 + t$ часа́ трите стрелки трябва да съвпаднат. Но след 12 часа́ трите стрелки съвпадат само в 24 часа́, т.е. те няма да съвпаднат след по-малко от 12 ча́са. Противоречие.

Практическият опит не поставя под съмнение последното твърдение, а неговото (необходимо) доказателство би могло да изглежда например така:

Да допуснем, че след като трите стрелки съвпаднат в 12 часа́, изминава време t, по-малко от 12 ча́са, и те отново съвпадат. Нека за това време часовата стрелка е изминала ъгъл α. Тъй като $t < 12$ часа, то $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$. За същото време минутната стрелка е изминала ъгъл $\alpha + n.360^\circ$, а секундната – $\alpha + m.360^\circ$, където n и m са естествени числа, показващи броя на направените от тези стрелки пълни завъртания. Но тъй като минутната стрелка се движи 12 пъти по-бързо от часовата, а секундната стрелка се движи 720 пъти по-бързо от часовата, имаме $\alpha + n.360^\circ = 12\alpha$ и $\alpha + m.360^\circ = 720\alpha$. Изразяваме $\alpha = 360^\circ\dfrac{n}{11} = 360^\circ\dfrac{m}{719}$. От равенството $\dfrac{n}{11} = \dfrac{m}{719} \iff 11m = 719n$ получаваме, че n се дели на 11, а m се дели на 719 (числата 11 и 719 са взаимно прости). Но тогава $\alpha = 360^\circ\dfrac{n}{11} \geq 360^\circ$, което противоречи на $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$.

Задачата е решена от **Николай Белухов от Стара Загора, Николай Димитров, Анна Стоименова и Тодор Биларев от НПМГ, Гергана Вълчева от Бургас, Иван Димитров от АК София**.

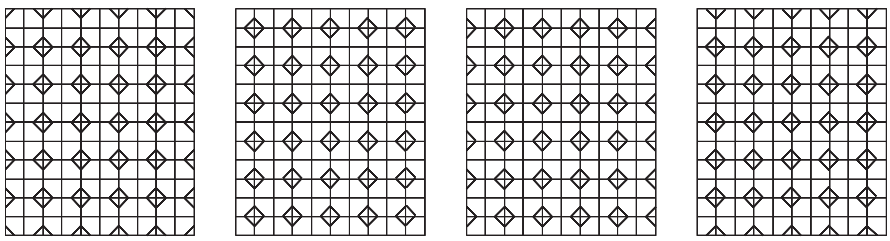
Задача 4. *(6 точки)* От лист на квадратчета е изрязан правоъгълник 10×12. Той е прегънат няколко пъти по линиите на квадратната мрежа, докато се получи квадрат 1×1. Колко части могат да се получат, ако този квадрат се разреже по отсечката, свързваща

а) средите на две срещуположни страни; (2 точки)

б) средите на две съседни страни. (4 точки)

(Намерете всички възможни отговори и докажете, че други няма.)

Решение: а) Нека разрязването е било вертикално и нека във всички единични квадратчета построим вертикални отсечки, свързващи средите на срещуположните страни. При сгъване по линиите на квадратната мрежа тези отсечки се наслагват една върху друга. Следователно разрязването става по тези и само тези отсечки. При това се получават или $10 + 1 = 11$, или $12 + 1 = 13$ части.



б) Да отбележим, че всяко единично квадратче ще бъде разрязано точно веднъж. Този разрез може да бъде направен по една от четирите отсечки, свързващи среди на съседни страни. Ако изберем един от четирите начина за разрязване на кое да е квадратче, разрезите в останалите квадратчета са еднозначно определени (виж фигурата). Получават се съответно $6.7 + 1 = 43$, $5.6 + 1 = 31$, $6.6 + 1 = 37$ и $5.7 + 1 = 36$ части.

Задачата е решена от **Николай Белухов от Стара Загора, Никола Чипев и Алиса Ковачева от НПМГ, Радостин Бакърджиев, Стоян Стоянов, Иво Петков, Тодор Стоянов, Георги Симеонов от Бургас, Кремена Маринова от Русе, Славина Китова АК София**.

Задача 5. *(6 точки)* Един конструктор се състои от набор правоъгълни паралелепипеди, които могат да се подредят в кутия, имаща форма на правоъгълен паралелепипед. В един бракуван набор всеки паралелепипед има едно ребро, което е по-малко от стандартното. Вярно ли е, че бракуваният набор може да се подреди в кутия, едно от ребрата на която е по-малко от това на стандартната кутия? (Паралелепипедите се подреждат в кутията така, че техните ребра да са успоредни на ребрата на кутията.)

Решение: Ще докажем, че бракуваният набор не винаги може да се подреди в кутия, едно от ребрата на която е по-малко от това на стандартната кутия. Нека например в кутия $2 \times 2 \times 3$ са подредени два паралелепипеда $1 \times 2 \times 3$. Скъсяваме малко реброто с дължина 3 на единия от тях, а на другия скъсяваме малко реброто с дължина 2. Тъй като вторият паралелепипед има ребро, равно на 3, височината на кутията не може да се намали. Тъй като и двата паралелепипеда имат височина по-голяма от 2, те могат да се поставят в кутията само вертикално. Ясно е, че не може да се промени взаимното разположение на паралелепипедите и затова и хоризонталните размери на кутията също не могат да се намалят.

Задачата е решена от **Димитър Василев от НПМГ**.

Задача 6. *(6 точки)* Емил и Иван си делят купчина от 25 монети, тежащи съответно $1, 2, 3, \ldots, 25$ грама. Първи на ход е Емил, а по-нататък на ход е този, който е събрал монети с по-голямо общо тегло от монетите на другия. Ако теглата на монетите и на двамата са равни, на ход е този, който е бил на ход преди това. Този, който е на ход избира монета от купчината, а противникът му казва на кого да бъде дадена тя. Може ли Емил да играе така, че теглото на събраните от него монети в края на играта да бъде по-голямо от теглото на монетите на Иван, или Иван винаги може да предотврати това?

Решение: Първо ще отбележим, че тази игра не може да завърши с равенство, тъй като общото тегло на монетите е нечетно. Това означава, че един от играчите има печеливша стратегия (докажете!).
Да допуснем, че Емил има печеливша стратегия. Нека той е направил първия ход. Тогава Емил трябва да може да отговори на всеки ход на Иван така, че в крайна сметка да спечели. Но ако Иван каже, че избраната от Емил монета трябва да се даде на Иван, то той ще се окаже в същата ситуация, в каквато би се оказал Емил, ако Иван беше казал монетата да се даде на Емил (и Емил при това щеше да знае как да спечели). Следователно Иван може да се възползва от тази стратегия и да спечели – противоречие. Следователно Емил няма печеливша стратегия, което означава, че печеливша стратегия има Иван.

Задачата е решена от **Антон Биков от НПМГ**.

Задача 7. *(8 точки)* Полетата на шахматна дъска са номерирани по следния начин. Полето в горния ляв ъгъл е номер 1; съседните му отдясно и отдолу полета са номер 2 и 3 съответно, трите полета от следващия диагонал са номер 4, 5 и 6 и т.н. Всеки диагонал се номерира от най-горното си дясно поле към най-долното си ляво поле. Предпоследният диагонал съдържа полета с номера 62 и 63, а полето в долния десен ъгъл е номер 64. Петър слага 8 камъчета в 8 полета на шахматната дъска така, че във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. След това той премества всяко камъче в поле с по-голям номер, отколко номера на полето, в което е било поставено първоначално. Възможно ли е отново във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче?

Решение: Ще докажем, че не е възможно след преместването във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. Нека на всяко камъче съпоставим неговите координати на шахматната дъска: камъчето в n-тия броен отляво надясно стълб и в m-тия броен отгоре надолу ред има координати (n, m).

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	1	2	4	7	11			
2	3	5	8	12				
3	6	9	13					
4	10	14						
5	15							55
6							56	59
7						57	60	62
8					58	61	63	64

Сборът от първите координати на всички камъчета е равен на $1+2+\cdots+8$, тъй като във всеки стълб има точно едно камъче. Сборът от вторите координати на всички камъчета също е равен на $1+2+\cdots+8$, тъй като във всеки ред има точно едно камъче; общият сбор от координатите им е $2(1+2+\cdots+8)$.
Да допуснем, че след преместването във всеки стълб и във всеки ред има по едно камъче. Това означава, че общият сбор от координатите на камъчетата ще бъде равен на $2(1+2+\cdots+8)$. При преместване на камъче в поле с по-голям номер то или се придвижва надолу по своя диагонал, или преминава в един от следващите (надясно) диагонали. Ако остане на своя диагонал, сборът от координатите на камъчето не се променя, но ако се премести в някой от намиращите се надясно диагонали, сборът от координатите му ще се увеличи. Следователно за да не се промени общият сбор на координатите на камъчетата, трябва всяко камъче да се премести надолу по своя диагонал. Това обаче е невъзможно, защото камъчето в най-долния ред не може да увеличи номера си, оставайки на своя диагонал. Противоречие.

Задачата е решена от **Николай Димитров от НПМГ**.