Тренировъчен вариант за 7 – 9 клас

Задача 1. *(3 точки)* Анна и Борис едновременно тръгнали един срещу друг от A и B съответно (всеки от тях се движи с постоянна скорост, която не е задължително една и съща). Ако Анна беше тръгнала 30 минути по-рано, те биха се срещнали на 2 км по-близо до B. Колко километра по-близо до A биха се срещнали двамата, ако Борис беше тръгнал 30 минути по-рано?

Решение: Нека Анна се движи с v_a км/ч, а Борис – с v_b км/ч, а разстоянието от A до B е s км. Двамата са се движили $\dfrac{s}{v_a+v_b}$ часа и са се срещнали на $v_b.\dfrac{s}{v_a+v_b}$ километра от B и на $v_a.\dfrac{s}{v_a+v_b}$ километра от A.

Ако Анна беше тръгнала 30 минути по-рано, Борис би се движил $\dfrac{s-\frac{v_a}{2}}{v_a+v_b}$ часа до срещата им, която би се състояла на $v_b.\dfrac{s-\frac{v_a}{2}}{v_a+v_b}$ километра от B. От условието имаме, че $v_b.\dfrac{s}{v_a+v_b}-v_b.\dfrac{s-\frac{v_a}{2}}{v_a+v_b}=2$, откъдето $\dfrac{v_a.v_b}{v_a+v_b}=4$.

Ако Борис беше тръгнал 30 минути по-рано, Анна би се движила $\dfrac{s-\frac{v_b}{2}}{v_a+v_b}$ часа до срещата им, която би се състояла на $v_a.\dfrac{s-\frac{v_b}{2}}{v_a+v_b}$ километра от A. Тъй като $v_a.\dfrac{s}{v_a+v_b}-v_a.\dfrac{s-\frac{v_b}{2}}{v_a+v_b}=\dfrac{v_a.v_b}{2(v_a+v_b)}=2$, то срещата би се състояла на 2 км по-близко до A.

Задачата е решена от **Христина Ангелова от Бургас, Николай Белухов от Стара Загора, Славина Китова, Виктор Константинов, Иван Димитров, Владимир Сотиров, Йоана Трайкова и Елена Николова от АК София**.

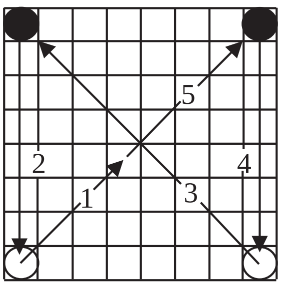
Задача 2. *(4 точки)* Нека N е естествено число. Докажете, че поне една от цифрите 1, 2 и 9 се среща в десетичния запис на N или $3N$.

Решение: Да допуснем, че в десетичния запис на $N=\overline{a_1a_2\dots a_k}$ не участва нито една от цифрите $1,2,9$. В произведението $3N$ първата (първите две) отляво цифри се получават като сбор на $3a_1$ с евентуален пренос (преносът при умножение с 3 може да бъде 0, 1 или 2). Тогава при $a_1=3$ първата цифра на $3N$ е 9 (ако няма пренос) или 1; при $a_1=4$ или 5 първата цифра на $3N$ е 1; при $a_1=6$ първата цифра на $3N$ е 1 или 2; при $a_1=7$ или 8 първата цифра на $3N$ е 2. Във всеки от случаите цифра 1, 2 или 9 се среща в десетичния запис на $3N$.

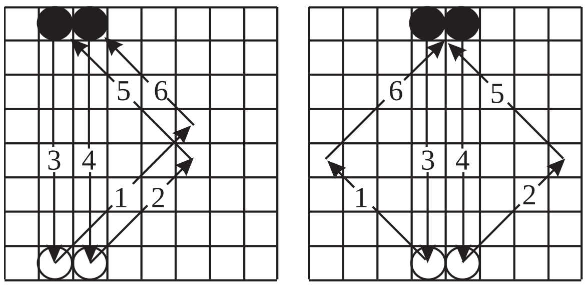
Задачата е решена от **Николай Белухов от Стара Загора и Йордан Върбев, Борислав Върбев и Кристина Русимова от Русе, Славина Китова, Виктор Константинов, Владимир Сотиров и Йоана Трайкова от АК София**.

Задача 3. *(5 точки)* На първия ред на шахматна дъска са поставени 8 неразличими черни царици, а на последния ред са поставени осем неразличими бели царици. Колко най-малко хода са необходими, за да си разменят местата белите и черните царици? Ходовете на белите и черните царици се редуват, като при всеки ход се премества точно една царица. (Цариците се придвижват на произволен брой полета в хоризонтално, вертикално или диагонално направление, като нямат право да прескачат други фигури по пътя си.)

Решение: Ще докажем, че белите и черните царици могат да си разменят местата най-малко с 23 хода. Тази от четирите царици в ъглите, която първа напусне мястото си, трябва да направи минимум два хода, т.е. ъгловите царици общо трябва да направят поне $1.2 + 3.1 = 5$ хода (виж фиг.1).



Фигура 1:



Фигура 2:

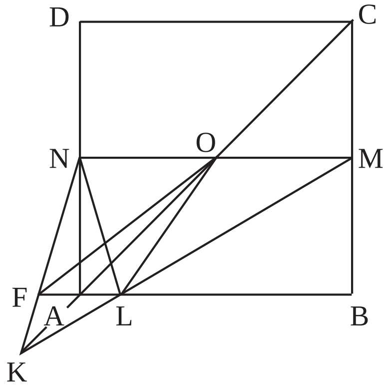
Останалите царици разделяме по двойки срещуположни (стоящи в един и същ стълб). Тази от две срещуположни царици, която напусне мястото си първа, трябва да направи поне два хода, докато попадне на новото си място; така общо за двете срещуположни царици са необходими минимум $1.2 + 1 = 3$ хода (виж фиг. 2). За 6 такива двойки са необходими общо $6.3 = 18$ хода. Така общо ходовете са 23.

Задачата е решена от **Николай Белухов от Стара Загора, Славина Китова, Виктор Константинов и Владимир Сотиров от АК София**.

Задача 4. *(5 точки)* В квадрат $ABCD$ точките M и N са среди съответно на страните BC и AD. На продължението на диагонала AC след A е взета точка K. Отсечката KM пресича страната AB в точка L. Докажете, че $\sphericalangle KNA = \sphericalangle LNA$.

Решение: Задачата се решава лесно с използване на подобни триъгълници ($\triangle KAF \sim \triangle KON$ и $\triangle KAL \sim KOM$), но за тези, които не са изучавали подобие, предлагаме решение с лица. От $MO = NO$ следва $S_{KNO} = S_{KMO}$; от $MO = NO$ и $MN || FL$ получаваме равенството $S_{NOF} = S_{MOL}$. Като извадим почленно получените равенства, намираме $S_{KFO} = S_{KLO}$. Тъй като $\dfrac{S_{KFO}}{S_{KLO}} = \dfrac{FA}{AL}$, стигаме до равенството $FA = AL$. Оттук $\triangle FLN$ е равнобедрен и $\sphericalangle KNA = \sphericalangle LNA$.

Задачата е решена от **Кристина Русимова и Калоян Митев от Русе, Веселина Гинева, Емил Ибришимов и Виолета Славова от Стара**

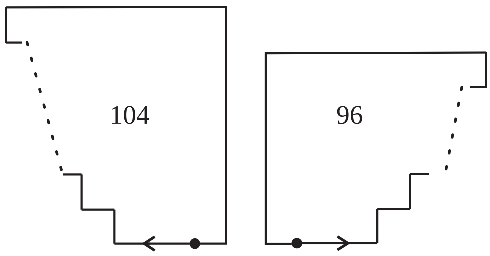


Фигура 3:

Загора, Славина Китова, Виктор Константинов, Иван Димитров, Владимир Сотиров и Николай Костов от АК София.

Задача 5. *(5 точки)* Всяка улица в един град води или от север на юг, или от изток на запад и е двупосочна. Шофьор пътувал из града, като направил 100 леви завоя и се върнал на мястото, от което тръгнал. Колко десни завоя е направил той, ако покрай никое място не е минал два пъти?

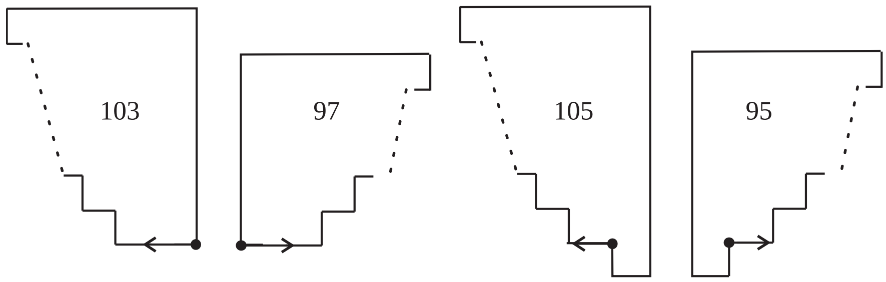
Решение: Шофьорът се е разходил по контура на несамопресичащ се многоъгълник. Да допуснем първо, че той е тръгнал от точка, която не е връх на този многоъгълник. Тогава той е направил сумарно точно едно завъртане (360°) около оста си. Всеки завой е на четвърт оборот (90°) наляво или надясно. Сборът от завоите наляво се различава от сбора на



Фигура 4:

завоите надясно с точно едно пълно завъртане, т.е. с 4 завоя. Това означава, че ако в маршрута има x леви завоя, десните завои са $x \pm 4$. Следователно шофьорът е направил 104 или 96 десни завоя (в първия случай пълното завъртане е в посока на часовниковата стрелка, а във втория – в обратна посока). На фигура 4 са показани примерни маршрути.

Случаят, когато шофьорът е тръгнал от връх на многоъгълника, може да се сведе до разгледания случай: разликата е, че завоят в последния връх сега "не се брои". Ако този завой би бил десен, левите завои в маршрута са 100, а десните са $104 - 1 = 103$ или $96 - 1 = 95$. Когато неброящият се завой е ляв, освен него трябва да има още 100 леви завоя. За 101 леви завоя в маршрута има $101 - 4 = 97$ или $101 + 4 = 105$ десни завоя (фигура 5).



Фигура 5:

Окончателно, десните завои са 95, 96, 97, 103, 104 или 105.

Задачата е решена от **Николай Белухов и Веселина Гинева от Стара Загора, Христо Николов от Русе, Виктор Константинов от АК София**.