26. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ – ЕСЕНЕН ТУР

Основен вариант, 10. - 12. клас

Задача 1. *(5 точки)* Функциите f и g са такива, че $g(f(x)) = x$ и $f(g(x)) = x$ за всяко реално число x. Ако за всяко реално число x е в сила равенството $f(x) = kx + h(x)$, където k е константа и $h(x)$ е периодична функция, докажете, че $g(x)$ може по подобен начин да се представи като сбор на линейна и периодична функции. (Функция h се нарича периодична, ако за всяко реално число x е в сила равенството $h(x + p) = h(x)$, където p е фиксирано реално ненулево число.)

Решение: Нека $d \neq 0$ е периода на функцията h (т.е. $h(x) = h(x + d)$ за всяко x). Да отбележим, че $k \neq 0$ (иначе $f(x) = h(x)$, откъдето $f(0) = f(d)$, следователно $0 = g(f(0)) = g(f(d)) = d$, противоречие).
Също така е ясно, че функцията f приема всички реални стойности: по условие $f(g(y)) = y$ за всяко y (стойността y се получава в точката $g(y)$).
Очевидно $g(y) = \dfrac{y}{k}+\left(g(y) - \dfrac{y}{k}\right)$. Функцията $\dfrac{y}{k}$ е линейна, затова е достатъчно да докажем, че функцията $s(y) = g(y) - \dfrac{y}{k}$ е периодична. Ще докажем, че kd е периодът на тази функция.
Първо, $x = g(f(x))$ и

$$x+d = g(f(x+d)) = g(k(x+d)+h(x+d)) = g(kx+kd+h(x)) = g(f(x)+kd).$$

Като означим $f(x)$ с y получаваме, че $g(y) + d = g(y + kd)$ за всяко y (тъй като $f(x)$ приема всички реални стойности). Но тогава

$$s(y + kd) = g(y + kd) - \frac{y + kd}{k} = g(y) + d - \left(\frac{y}{k} + d\right) = g(y) - \frac{y}{k} = s(y),$$

т.е. $s(y)$ е периодична (с период kd), което и трябваше да докажем.

Задача 2. *(5 точки)* Двама играчи поред вземат камъни от купчина. При всеки свой ход първият играч може да вземе или 1, или 10 камъка, а вторият може да вземе или m, или n камъка. Губи този, който не може да направи ход. Ако първият има стратегия, която му гарантира победа независимо от първоначалния брой камъни в купчината, намерете m и n.

Решение: Ще докажем, че числата m и n са не по-малки от 9, като модулът на разликата им не е равен на 9.
Да допуснем, че някое от числата m и n е по-малко от 9 (например m). Тогава ако имаме купчина с $m+1$ камъка, първият ще е длъжен с първия

си ход да вземе 1 камък (тъй като $m+1<10$), след което вторият взема m камъка и печели – противоречие. Следователно и m, и n са най-малко 9.
Да допуснем, че $m-n=9$. Тогава ако имаме купчина с $m+1=n+10$ камъка, първият взема 1 камък, вторият m камъка или първият взема 10 камъка, вторият n камъка, като и в двата случая вторият печели – противоречие. Следователно $|m-n|\neq 9$.
Ще докажем, че при останалите стойности на m и n първият печели. За целта е достатъчно да покажем, че при произволен брой камъни в купчината първият може да направи такъв ход, че оставалият в купчината брой камъни да бъде различен от m и n.
Нека в купчината има k камъка и първият е на ход. Ако $k\leq 10$, първият печели с един ход (вземайки 10 камъка, ако $k=10$, или 1 камък, ако $k\leq 9$). Ако $k>10$, след своя ход първият оставя в купчината или $k-1$, или $k-10$ камъка. Ако в единия случай се получава m, а в другия – n, то модулът на разликата между m и n ще бъде равен на 9 – противоречие. Следователно първият може да направи ход така, че вторият след това да не спечели с един ход. Тъй като броят на камъните в купчината намалява, накрая ще спечели първия.

Задача 3. *(5 точки)* На дъската, в някакъв ред, са записани стойностите на изразите $x+y$, $x-y$, xy и $\dfrac{x}{y}$, където x и y са положителни числа. Докажете, че тази информация еднозначно определя x и y.

Решение: Да отбележим, че средното аритметично на числата $x-y$ и $x+y$ е равно на средното геометрично на числата $\dfrac{x}{y}$ и xy (иі е равно на x).
Изчерпвайки възможните двойки, намираме на дъската две числа a и b, чието средно аритметично е равно на средното геометрично на останалите две числа c и d, т.е. $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{cd}$. Ще докажем, че в двойката $\{a,b\}$ едно от числата е равно на $x-y$, а другото е равно на $x+y$. Ако в равенството

$$\frac{(x-y)+(x+y)}{2}=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)\cdot(xy)}.$$

разменим местата на едно от числата $x-y$, $x+y$ с едно от числата $\dfrac{x}{y}$, xy, равенството няма да се промени само когато разместените числа са равни: в обартен случай една от частите на равенстото се увеличава, а другата се намалява.

Затова двойката $\{a, b\}$ е или $\{x - y, x + y\}$, или $\left\{\frac{x}{y}, xy\right\}$. Последното е невъзможно, тъй като тогава средното геометрично на числата c и d ще бъде равно на $\sqrt{(x + y)(x - y)} = \sqrt{x^2 - y^2} < x$, а средното аритметично на $\frac{x}{y}$ и xy е не по-малко от тяхното средно геометрично, т.е. не по-малко от x.
Следователно в двойката $\{a, b\}$ едно от числата е равно на $x - y$, а другото е равно на $x + y$, откъдето еднозначно определяме x (средно аритметично на a и b) и y (разлика на по-голямото от числата a, b и числото x).

Задача 4. *(6 точки)* Окръжност с център I е вътрешна за окръжност с център O. В голямата окръжност е построена хорда AB, която се допира до малката окръжност. Определете геометричното място на центъра на описаната около триъгълника IAB окръжност.

Решение: Ще докажем, че търсеното ГМТ е окръжност с център O и радиус $\frac{R^2 - d^2}{2r}$, където R и r са радиусите на дадените окръжности, а $d = OI$.
Нека M е средата на AB, H е пета на перпендикуляра от I към OM, X е център на описаната окръжност около $\triangle IAB$. Тогава

$$\begin{aligned} XB^2 &= XM^2 + MB^2 = XM^2 + R^2 - OM^2, \\ XI^2 &= IH^2 + XH^2 = (d^2 - (OM - r)^2) + (XM + r)^2. \end{aligned}$$

Но $XB = XI$ и от горните равенства получаваме $R^2 = d^2 + 2r(OM + XM)$, т.е. $OX = \frac{R^2 - d^2}{2r}$ не зависи от избора на хордата AB. Лесно се проверява, че всички точки от окръжността с център O и радиус OX принадлежат на търсеното ГМТ.

Задача 5. *(7 точки)* Докажете, че ако съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $a \times b$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $c \times d$, то съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $c \times d$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $a \times b$.

Решение: За удобство ще означим с A правоъгълниците $a \times b$, а с B правоъгълниците с размери $c \times d$. Нека P е правоъгълник, подобен на A, нарязан на правоъгълници B. Тогава неговите размери са $(pc + qd) \times (rc + sd)$, където p, q, r, s са неотрицателни цели числа.

Първи случай. Нека отношението на страните на B е рационално, т.е $c : d = m : n$, където m иі n са естествени числа. Тогава отношението на страните на P е $(pc + qd) : (rc + sd) = (p(c : d) + q) : (r(c : d) + s)$, също рационално. От подобието на P и A следва, че и отношението на страните на A е рационално: $a : b = k : l$, където k и l са естествени числа. Но тогава от kl еднакви на A правоъгълника може да се сглоби квадрат. (Като разположим в ред l такива правоъгълника, за да се получи правоъгълник с височина b и дължина la; под него – още един такъв ред и т.н. общо k реда; получаваме квдарат със страна $la = kb$.) От такива квадрати сглобяваме правоъгълник, подобен на B, като mn квадрата се разположат в n реда, съставени от по m квадрата.

Втори случай. Нека отношението на страните на B е ирационално. Ще докажем следното твърдение:

Всички правоъгълници, на които е нарязан правоъгълника P, са еднакво ориентирани (т.е. всички техни по-големи страни са успоредни).

Да отбележим, че ако дадено число се пресдставя във вида $zc+td$, където z и t са цели числа, то z и t са еднозначно определени. Това е така, защото ако $zc+td = z'c+t'd$, където z' и t' са цели числа, то $(z-z')c = (t-t')d$, и при $z \neq z'$ отношението $c : d$ ще бъде рационално, противоречие; следователно $z = z'$ и тогава и $t = t'$.

Нека P има върхове P_1, P_2, P_3, P_4 (виж чертежа). Нека от този ъгъл е изрязан правоъгълник, чиято по-дълга страна е хоризонтална. Разглеждаме най-големия правоъглник от вида P_1UVW, който е нарязан на правоъгълници, всички по-дълги страни на които са хоризонтални (U лежи на P_1P_2, а W на P_1P_4).
Да допуснем, че точка V е вътрешна за P. Разглеждаме правоъгълниците от разрязването (извън P_1UVW), прилежащи към страната UV. Техните по-дълги страни не са всичките хоризонтални, защото иначе правоъгълникът $PUVW$ не е най-големият. Аналогично не са хоризонтални всички по-дълги страни на правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW.
Ако допуснем, че правоъгълниците от разрязването извън P_1UVW, прилежащи към UV, не излизат вдясно след страната UV, ще получим, че дължината на UV се представя по два начина във вида $zc+td$ с цели z и t, противоречие. Следователно тези правоъгълници излизат вдясно. Но тогава правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW, не излизат нагоре от страната VW, т.е. дължината на VW по два начина се представя във вида $zc+td$ с цели z и t, противоречие.
Случаят, когато точката V лежи на границата на правоъгълника P, но не съвпада с P_3, по аналогичен начин води до противоречие.
Следователно V съвпада с P_3, с което твърдението е доказано.
Но тогава отношението на страните на A е равно на $(zc) : (td)$, където z и t са цели числа. Нека $(zc) : (td) = a : b$. Тогава $(ta) : (zb) = c : d$ и

можем да получим правоъгълник, подобен на B, разполагайки еднакви с A правоъгълници в редове така, че техните равни на a страни да бъдат хоризонтални, като във всеки ред има по t правоъгълника, а редовете са общо z.

Задача 6. *(8 точки)* Нека n е фиксирано просто число, по-голямо от 3. Един триъгълник ще наричме *приемлив*, ако градусната мярка на всеки негов ъгъл е от вида $\dfrac{180m}{n}$ за някое естествено число m. Отначало на масата има един приемлив триъгълник. Позволява се да се вземе триъгълник от масата и да се разреже на два приемливи триъгълника, нито един от които не е подобен на някой от тези на масата. Двата получени триъгълника също се поставят на масата. Докажете, че в момента, в който следващо разрязване е невъзможно, всеки приемлив триъгълник е подобен на някой от триъгълниците на масата.

Решение: Ако приемем ъгъла $\dfrac{180^\circ}{n}$ за 1, то сборът от ъглите на триъгълник ще бъде n. Ще описваме триъгълниците с тройки ъгли. Да разделим приемливите триъгълници на присъстващи (като части на масата) и отсъстващи. Нека a е най-малкият ъгъл измежду ъглите на отсъстващите триъгълници. Избираме всички отсъстващи триъгълници с ъгъл a, отбелязваме в тях по един ъгъл a, а останалите им ъгли ще наречем допълнителни (някои допълнителни също могат да бъдат равни на a). Измежду допълнителните ъгли избираме ъгъл b – най-големият кратен на a (ако има такъв) или просто най-големият (ако няма кратни на a). Разглеждаме отсъстващия триъгълник (a, b, c).
Ще докажем, че триъгълник $(a, a + b, n - 2a - b)$ присъства. Измежду допълнителните ъгли няма равен на $a + b$, тъй като в обратен случай бихме избрали него вместо b. Следователно, достатъчно е да покажем, че $n - 2a - b > 0$. От избора на a следва, че $c \geq a$, оттук $n - 2a - b = (a + b + c) - 2a - b = c - a \geq 0$, като равенство е възможно само ако $c = a$. Но ако $c = a$, то измежду допълнителните ъгли има кратни на a, следователно и b е кратен на a, откъдето и простото n е кратно на a – противоречие.
Остана да разрежем присъстващия триъгълник $(a, a + b, n - 2a - b)$ така, че ъгъл $a + b$ да се раздели на ъгли a и b и да се получат триъгълници $(b, a, ...)$ и $(a, n - 2a - b, ...)$, т.е. отсъстващия (b, a, c) и $(a, n - 2a - b, a + b)$, подобен на разрязания.

Задача 7. *(8 точки)* С начало точка O са построени лъчите OA, OC, OB и OD в този ред така, че $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$. Окръжност, вписана в $\sphericalangle AOB$

пресича окръжност, вписана в $\sphericalangle COD$ в точките E и F. Докажете, че $\sphericalangle AOE = \sphericalangle DOF$.

Решение: Нека окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ са вписани съответно в $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$. Да разгледаме инверсия с център точка O, която изобразява k_1 в окръжност k_1' с радиус r_2.

Тогава k_2 съответно преминава в окръжност k_2' с радиус r_1. Пресечните точки E и F на k_1 и k_2 при тази инверсия преминават в пресечните точки E' и F' на k_1' и k_2'. При това $F' \in OF$ и $E' \in OE$.

Инверсната конфигурация е симетрична на първоначалната относно ъглополовящата l на $\sphericalangle AOD$; включително и OF и OE' са симетрични относно l. Следователно l е ъглополовяща и на $\sphericalangle E'OF$, т.е. на $\sphericalangle EOF$, откъдето $\sphericalangle AOE = \sphericalangle DOF$.