26. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ – ЕСЕНЕН ТУР

Тренировъчен вариант, 10. - 12. клас

Задача 1. *(3 точки)* Три окръжности минават през точка X. Точките на пресичане, различни от X, са означени с A, B и C. Нека A' е втората пресечна точка на правата AX с описаната около триъгълника BCX окръжност. Точките B' и C' се определят аналогично. Докажете, че триъгълниците ABC', $AB'C$ и $A'BC$ са подобни.

Решение: Решението зависи от разположението на окръжностите. Ще разгледаме един от случаите, когато точка X лежи във вътрешността на $\triangle ABC$. Нека $\sphericalangle FXA = \sphericalangle CXA' = \alpha$, $\sphericalangle C'XB = \sphericalangle CXB' = \beta$ и $\sphericalangle A'XB = \sphericalangle AXB' = \gamma$. Сборът на тези шест ъгъла е равен на 360°, откъдето следва, че $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Разглеждаме $\triangle ABC'$. Ъгълът $\sphericalangle C'BA$ се измерва със същата дъга, както $\sphericalangle C'XA$, т.е. е равен на α. Ъгълът $\sphericalangle C'AB$ се измерва със същата дъга, както $\sphericalangle C'XB$, т.е. е равен на β. Тъй като сборът от ъглите в триъгълника е равен на 180°, третият ъгъл $\sphericalangle AC'B$ е равен на γ. Аналогично се доказва, че триъгълниците $AB'C$ и $A'BC$ имат ъгли α, β и γ, т.е. тези три триъгълника са подобни.

Задача 2. *(3 точки)* В кутия има бели, сини и червени топки, общо 100. Ако със затворени очи се извадят 26 топки от кутията, то измежду тях задължително ще има 10 едноцветни топки. Колко най-малко топки трябва да се извадят със затворени очи от кутията, за да е сигурно, че сред тях има 30 едноцветни топки?

Решение: Ще докажем, че е необходимо да се извадят най-малко 66 топки. Нека белите топки са не повече от топките от всеки от останалите цветове. Тогава белите топки са не повече от 8 (тъй като в обратен случай топките от всеки цвят са не по-малко от 9 и може да вземем 8 бели, 9 сини и 9 червени, общо 26 топки, като измежду тях няма 10 топки от един цвят, противоречие).
Ако белите топки са точно 8, то и от още един цвят има точно 8 топки (иначе, както по-горе, вземеме 8+9+9=26 топки и получаваме противоречие). Тогава е достатъчно да вземем 8+8+30=46 топки: измежду тях задължително ще има 30 едноцветни.
Ако белите топки са не повече от 7, то като вземем произволни 7+29+30=66 топки, измежду тях ще има поне 59 червени и сини, измежду които пък ще има поне 30 едноцветни.
Ще покажем, че 65 топки не са достатъчни. Нека белите са 7, сините са 29, а червените са 64. Условието на задачата е изпълнено: измежду кои да е

26 топки има не по-малко от $26-7=19$ сини и червени, следователно поне 10 едноцветни. От друга страна, като вземем 7 бели, 29 сини и 29 червени топки, ще вземем общо 65 топки, измежду които няма 30 едноцветни.

Задача 3. *(4 точки)* Дадени са два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, за които са изпълнени тъждествата $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Следва ли оттук, че е изпълнено тъждеството $P(x) = Q(x)$?

Решение: Ще докажем, че тъждеството $P(x) = Q(x)$ е изпълнено. Ще използваме следните две твърдения:

1. Многочлен от ненулева степен приема безкраен брой различни стойности.
2. Многочлен, който не е тъждествено равен на 0, има краен брой корени (техният брой не надхвърля степента на многочлена).

Да отбележим, че многочленът $R(x) = P(P(x)) = Q(Q(x))$ е от ненулева степен. Тогава $R(x)$ приема безкраен брой различни стойности. Тъй като $P(R(x)) = Q(R(x))$ при всяко x (по условие), получаваме, че многочлените P и Q съвпадат при безкраен брой различни значения на променливата, следователно съвпадат винаги (в обратен случай тяхната разлика $P-Q$ ще бъде многочлен, който не е тъждествено равен на 0, а има безкраен брой корени).

Задача 4. *(4 точки)* По колко различни начина числото 2004 може да се представи като сбор на естествени числа (едно или няколко), които са приблизително равни? Две числа се наричат приблизително равни, ако разликата им е не повече от 1. Сборовете, кото се различават само по реда на събираемите, се смятат за еднакви.

Решение: Отговорът е 2004.

Първи начин. Да отбележим, че при всяко представяне на 2004 като сбор на приблизително равни събираеми, в сбора участват най-много две различни събираеми.

Ще докажем, че за всяко цяло число k от 1 до 2004 съществува единствено представяне на 2004 като сбор на k приблизително равни събираеми.

За да се представя 2004 като сбор на k числа, от които x числа са равни на m и y са равни на $m+1$ (като $x+y=k$ и нека $x>0$), трябва да е изпълнено равенството

$$2004 = mx + (m+1)y = mk + y,$$

където $0 \le y < k$. Но оттук y се определя еднозначно – това е остатъкът при деление на 2004 на k, а тогава $x = k - y$.

Следователно представянията са общо 2004.

Втори начин. Ще докажем по индукция, че числото N може да се представи като сбор на приблизително равни събираеми по N начина.

Да отбележим, че във всяко такова представяне участват най-много две различни събираеми.
За числото 1 има едно представяне: с едно събираемо 1.
Нека твърдението е доказано за някое число N. Прибавяйки във всяко представяне на N единица към едно от по-малките събираеми (или към кое да е, ако всички са равни), получавме преставяне на числото $N+1$ (със същия брой събираеми). При това от различни представяния на числото N се получават различни представяния на $N+1$.
Обратно, ако във всяко представяне на $N+1$ (освен представянето като сбор на $N+1$ единици) едно от по-големите събираеми се намали с 1 (или, ако събираемите са равни, кое да е от тях се намали с 1), се получава представяне на N (със същия брой събираеми). При това от различни представяния на $N+1$ се получавт различни представяния на N.
Следователно броят на представянията на числото $N+1$ е с 1 по-голям от броя на представянията на N. По индукция твърдението е доказано.

Задача 5. *(5 точки)* При какви N е възможно числата от 1 до N да се подредят в редица така, че средното аритметично на всяка група от две или повече поредни в редицата числа да не е цяло число?

Решение: Ще докажем, че всички четни N изпълняват условието.
Да отбележим, че при нечетно N такова подреждане е невъзможно, тъй като средното аритметично на всичките N числа е равнона $\frac{N+1}{2}$, цяло число.
Ще докажем, че при всяко четно N подреждането $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots, N, N-1$ изпълнява условието.
Да вземем група от четен брой поредни числа от това подреждане. Възможни са два случая.
В първия случай групата има вида $k+2, k+1, \ldots, k+2m, k+2m-1$, а във втория има вида $k+1, k+4, k+3, \ldots, k+2m, k+2m-1, k+2m+2$. Във втория случай можем да извадим от последното число 1 и да прибавим 1 към първото; така сборът на числата няма да се промени и ще получим група от последователни (разместени) цели числа, както и в първия случай.
Следователно средното аритметично на всяка група с четен брой числа е равно на средното аритметично на четен брой последователни цели числа, което винаги не е цяло: $\frac{(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2m)}{2m} = k + \frac{2m+1}{2}$.
Да вземем група с нечетен брой поредни числа от избраното подреждане. Тя има вида $k+2, k+1, \ldots, k+2m, k+2m-1, k+2m+2$ или $k-1, k+2, k+1, \ldots, k+2m, k+2m-1$, В първия случай сборът на числата в групата е с 1 повече от сбора на нечетен брой последователни цели числа

и средното аритметично е $\frac{(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2m+1)+1}{2m+1} = k + m + 1 + \frac{1}{2m+1}$, не цяло. Във втория сборът на числата в групата е с 1 по-малко от сбора на нечетен брой последователни цели числа и средното аритметично е $\frac{k+(k+1)+\ldots+(k+2m)-1}{2m+1} = k + m - \frac{1}{2m+1}$, не цяло.