26. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ – ЕСЕНЕН ТУР

Основен вариант, 7. - 9. клас

Задача 1. *(4 точки)* Един триъгълник ще наричаме *рационален*, ако градусните мерки на ъглите му са рационални числа. Точка във вътрешността на рационален триъгълник ще наричаме *интересна,* ако и трите триъгълника, които се получават, когато тази точка се свърже с върховете на дадения триъгълник, са рационални. Докажете, че във вътрешността на всеки остроъгълен рационален триъгълник има поне три интересни точки.

Решение: В неравностранен триъгълник подходящ избор са ортоцентърът, центърът на вписаната окръжност и центърът на описаната окръжност (те са различни). В равностранен триъгълник едно възможно решение е да се построи една от височините и да се изберат произволни три точки върху тази височина, от които страната, към която е построена височината се вижда под рационален ъгъл.

Задача 2. *(5 точки)* Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните му BC, CA и AB в точките D, E и F съответно. Следва ли от равенството $AD = BE = CF$ че триъгълникът ABC е равностранен?

Решение: Ще докажем, че от условието следва, че триъгълникът е равностранен. Разглеждаме $\triangle CDA$ и $\triangle CEB$. В тези триъгълници $DA = EB$ по условие, $CE = CD$ като допирателни към окръжност, а ъгъл C е общ. Тогава ъглите $\sphericalangle CAD$ и $\sphericalangle CBE$ са или равни, или имат сбор 180°. Последното е невъзможно, тъй като сборът на тези два ъгъла е по-малък от сбора на $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ в $\triangle ABC$, а значи е по-малък от 180°.
Следователно $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$ са равни и $\triangle CAD \cong \triangle CBE$, следователно $AC = BC$. Аналогично получаваме, че $BC = BA$, т.е. $\triangle ABC$ е равностранен.

Задача 3. *(6 точки)* Колко най-много коня могат да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всеки от тях да застрашава най-много седем други коня?

Решение: Ще докажем, че максималният брой коне е 60.
Пример за такова разположение се получава като поставим коне във всички полета освен в четирите полета на централния квадрат 2×2. Не е трудно да се провери, че всеки кон застрашава не повече от 7 други коня.
Ще докажем, че броят на конете не може да бъде увеличен. Разглеждаме централния квадрат 4×4. Ако в централния квадрат 4×4 се поставят 12 или по-малко коня, то общият брой на конете ще бъде не повече от 60.
Нека в централния квадрат 4×4 са поставени не по-малко от 13 коня. Тогава всеки от тях застрашава 8 полета на дъската, едно от които е

празно. Тогава празните полета са не по-малко от 13:4 (тъй като всяко празно поле се застрашава от не повече от 4 коня от централния квадрат), т.е. не по-малко от 3,25.
Следователно празните полета са поне 4 и конете са не повече от 60.

Задача 4. *(6 точки)* На дъската, в някакъв ред, са записани стойностите на изразите $x+y$, $x-y$, xy и $\frac{x}{y}$, където x и y са положителни числа. Докажете, че тази информация еднозначно определя x и y.

Решение: Да отбележим, че средното аритметично на числата $x-y$ и $x+y$ е равно на средното геометрично на числата $\frac{x}{y}$ и xy (иі е равно на x).
Изчерпвайки възможните двойки, намираме на дъската две числа a и b, чието средно аритметично е равно на средното геометрично на останалите две числа c и d, т.е. $\frac{a+b}{2}=\sqrt{cd}$. Ще докажем, че в двойката $\{a,b\}$ едно от числата е равно на $x-y$, а другото е равно на $x+y$. Ако в равенството

$$\frac{(x-y)+(x+y)}{2}=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)\cdot(xy)}.$$

разменим местата на едно от числата $x-y$, $x+y$ с едно от числата $\frac{x}{y}$, xy, равенството няма да се промени само когато разместените числа са равни: в обартен случай една от частите на равенстото се увеличава, а другата се намалява.
Затова двойката $\{a,b\}$ е или $\{x-y,x+y\}$, или $\left\{\frac{x}{y},xy\right\}$. Последното е невъзможно, тъй като тогава средното геометрично на числата c и d ще бъде равно на $\sqrt{(x+y)(x-y)}=\sqrt{x^2-y^2}<x$, а средното аритметично на $\frac{x}{y}$ и xy е не по-малко от тяхното средно геометрично, т.е. не по-малко от x.
Следователно в двойката $\{a,b\}$ едно от числата е равно на $x-y$, а другото е равно на $x+y$, откъдето еднозначно определяме x (средно аритметично на a и b) и y (разлика на по-голямото от числата a, b и числото x).

Задача 5. *(7 точки)* Точка K е вътрешна за страната BC на триъгълника ABC. Вписаната в триъгълника BAK окръжност допира BC в точка M. Вписаната в триъгълника CAK окръжност допира BC в точка N. Докажете, че $BM.CN>KM.KN$.

Решение: Построяваме допирателна към вписаната в $\triangle ABK$ окръжност с център O, успоредна на AK (различна от AK) и нека тя пресича страната

BC в точка M_1. Аналогично, построяваме допирателна към вписаната в $\triangle ACK$ окръжност с център I, успоредна на AK (различна от AK) и нека тя пресича страната BC в точка N_1.
Тогава правоъгълните триъгълници M_1OK и N_1IK са подобни ($\sphericalangle OKM_1 = 90^\circ - \sphericalangle IKN_1 = \sphericalangle IN_1K$).
Тъй като OM и IN са съответни височини в тези триъгълници, имаме $M_1M : MK = KN : NN_1$, откъдето $MM_1.NN_1 = KM.KN$. Сега от неравенствата $BM > MM_1$ и $CN > NN_1$ получаваме $BM.CN > KM.KN$.

Задача 6. *(8 точки)* Двама приятели си делят буца сирене и, разбира се, всеки иска да вземе колкото може повече. Отначало те се редуват, като всеки избира едно от съществуващите до момента парчета и го разрязва на две. Рязането приключва, когато парчетата станат общо пет. След това приятелите поред си избират и вземат по едно парче. Този, който реже пръв, избира пръв и получава едно парче повече. Каква е оптималната стратегия на всеки и какво количество сирене му гарантира тя, независимо от ходовете на другия?

Решение: Нека общо има 50 кг сирене. Играят I и II и нека R_1 и R_2 са резултатите на I и II. По-нататък навсякъде ще считаме, че $x \leq y$ и $a \leq b \leq c$. Ясно е, че след рязането всеки взема най-голямото съществуващо парче. Тогава при разрязване на парчета

$$N(a,b) = \{10, 10-a, 10-b, 10+a, 10+b\}$$

играчите ще получат $R_1 = 30$ и $R_2 = 20$. Освен това, при разрязване на парчета $\{a, b_1 \geq b_2, c_1 \geq c_2\}$ ще имаме $R_1 \geq a + b_2 + c_2$.

Ще покажем как I може да получи $R_1 \geq 30$. С първия си ход той довежда до $\{30, 20\}$. В зависимост от хода на втория, с втория си ход I може да доведе играта до една от двете позиции:

$$K(a) = \{20, 10+a, 10, 10-a\}, \quad \text{където} \quad a < 5$$

или

$$L(a) = \{20+a, 10-a, 10+a, 10-a\}, \quad \text{където} \quad a \geq 5.$$

Случай K. Ако II разрязва 20, получаваме $N(a,b)$. Ако II разрязва $10-a$ или $10+a$ така, че по-голямото парче да е ≥ 10, то $R_1 \geq 20 + 10 = 30$. Ако II разрязва $10 = x + y$, то $x \leq 5 \leq 10 - a$, $y \leq 10 + a$, следователно $R_1 \geq 20 + x + y = 30$. Ако II разрязва $10 + a = x + y$, където $y \leq 10$, то $x \geq a$, а разрязването става $\{20, y \geq x, 10 + a \geq 10 - a\}$, следователно първият получава $R_1 \geq 20 + x + 10 - a \geq 20 + a + 10 - a = 30$.

Случай L. Тогава II е принуден да разреже $20 + a = x + y$ и разрязването става $\{y, 10 + a \geq x, 10 - a \geq 10 - a\}$, следователно първият получава $R_1 \geq y + x + 10 - a = 20 + a + 10 - a = 30$.

Ще покажем как II може да играе, за да получи $R_2 \geq 20$. Нека първият ход е бил x, y. Ако $x < 10$ или $x > 20$, то II разрязва до $\{a, b, b\}$, където $a < 10$, и, повтаряйки хода за равните парчета, постига $R_1 - R_2 \leq a < 10$. В обратен случай II разрязва до $\{p, q, 20\}$, където p и $q \geq 10$. Ако в отговор I разрязва парчето от 20 кг, то II довежда до $N(a, b)$. Иначе пред II е позицията $\{a, b, c, 20\}$, където $a+b+c = 30$. Той довежда до $\{a, b, c, b, 20-b\}$. Ясно е, че $a+b \leq 20$ и $b+c \geq 20$, следователно $a \leq 20-b \leq c$ и така получава $R_2 = b + (20 - b) = 20$.

Задача 7. *(8 точки)* Докажете, че ако съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $a \times b$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $c \times d$, то съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $c \times d$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $a \times b$.

Решение: За удобство ще означим с A правоъгълниците $a \times b$, а с B правоъгълниците с размери $c \times d$. Нека P е правоъгълник, подобен на A, нарязан на правоъгълници B. Тогава неговите размери са $(pc + qd) \times (rc + sd)$, където p, q, r, s са неотрицателни цели числа.

Първи случай. Нека отношението на страните на B е рационално, т.е $c : d = m : n$, където m иі n са естествени числа. Тогава отношението на страните на P е $(pc + qd) : (rc + sd) = (p(c : d) + q) : (r(c : d) + s)$, също рационално. От подобието на P и A следва, че и отношението на страните на A е рационално: $a : b = k : l$, където k и l са естествени числа. Но тогава от kl еднакви на A правоъгълника може да се сглоби квадрат. (Като разположим в ред l такива правоъгълника, за да се получи правоъгълник с височина b и дължина la; под него – още един такъв ред и т.н. общо k реда; получаваме квдарат със страна $la = kb$.) От такива квадрати сглобяваме правоъгълник, подобен на B, като mn квадрата се разположат в n реда, съставени от по m квадрата.

Втори случай. Нека отношението на страните на B е ирационално. Ще докажем следното твърдение:

Всички правоъгълници, на които е нарязан правоъгълника P, са еднакво ориентирани (т.е. всички техни по-големи страни са успоредни).

Да отбелжим, че ако дадено число се предсставя във вида $zc+td$, където z и t са цели числа, то z и t са еднозначно определени. Това е така, защото ако $zc+td = z'c+t'd$, където z' и t' са цели числа, то $(z-z')c = (t-t')d$, и при $z \neq z'$ отношението $c : d$ ще бъде рационално, противоречие; следователно $z = z'$ и тогава и $t = t'$.

Нека P има върхове P_1, P_2, P_3, P_4 (виж чертежа). Нека от този ъгъл е изрязан правоъгълник, чиято по-дълга страна е хоризонтална. Разглеждаме най-големия правоъглник от вида P_1UVW, който е нарязан на правоъгълници, всички по-дълги страни на които са хоризонтални (U лежи на P_1P_2, а W на P_1P_4).
Да допуснем, че точка V е вътрешна за P. Разглеждаме правоъгълниците от разрязването (извън P_1UVW), прилежащи към страната UV. Техните по-дълги страни не са всичките хоризонтални, защото иначе правоъгълникът $PUVW$ не е най-големият. Аналогично не са хоризонтални всички по-дълги страни на правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW.
Ако допуснем, че правоъгълниците от разрязването извън P_1UVW, прилежащи към UV, не излизат вдясно след страната UV, ще получим, че дължината на UV се представя по два начина във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие. Следователно тези правоъгълници излизат вдясно. Но тогава правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW, не излизат нагоре от страната VW, т.е. дължината на VW по два начина се представя във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие.
Случаят, когато точката V лежи на границата на правоъгълника P, но не съвпада с P_3, по аналогичен начин води до противоречие.
Следователно V съвпада с P_3, с което твърдението е доказано.
Но тогава отношението на страните на A е равно на $(zc) : (td)$, където z и t са цели числа. Нека $(zc) : (td) = a : b$. Тогава $(ta) : (zb) = c : d$ и можем да получим правоъгълник, подобен на B, разполагайки еднакви с A правоъгълници в редове така, че техните равни на a страни да бъдат хоризонтални, като във всеки ред има по t правоъгълника, а редовете са общо z.