26. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ – ЕСЕНЕН ТУР

Тренировъчен вариант, 7. - 9. клас

Задача 1. *(3 точки)* Възможно ли е естествените числа от 1 до 2004 да се подредят в редица така, че сборът на всеки десет поредни в тази редица числа да се дели на 10?

Решение: Да допуснем, че е възможно и да заменим всяко число в редицата с неговия остатък при деление на 10. Тогава от условието следва, че 11-тото число е равно на първото, 12-тото е равно на второто и т.н., 21-то число е рано на 11-тото, а значи и на първото, и т.н. Това означава, че само първите десет остатъка се срещат в редицата и следователно първите десет остатъка са $0, 1, \ldots, 9$ в някакъв ред. Но тогава сборът на първите десет числа дава остатък $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, т.е. 5 при деление на 10. Полученото противоречие показва, че такова нареждане е невъзможно.

Задача 2. *(4 точки)* В кутия има червени, сини, жълти и бели топки, общо 111. Ако със затворени очи се извадят 100 топки от кутията, измежду тях задължително ще има четири топки, всеки две от които са с различен цвят. Колко най-малко топки трябва да се извадят от кутията (със затворени очи), за да може със сигурност да се твърди, че сред тях има три топки, всеки две от които са с различен цвят?

Решение: Ако топките от някой цвят са не повече от 11, тогава останалите топки са поне $111 - 11 = 100$, и измежду тях няма 4 топки sc различен цвят. Следователно топките от всеки цвят са най-малко 12.
Но тогава ако се вземат 88 топки, измежду тях със сигурност ще има три разноцветни топки (тъй като $88 = 111 - 12 \cdot 2 + 1$, т.е. не са взети $12 \cdot 2 - 1$ топки, следователно изцяло не е взет максимум един цвят).
Ще покажем, че не е достатъчно да вземем 87 топки. Нека червените топки са 12, сините са 12, зелените са 12 и белите са 75. Условието на задачата в този случай е изпълнено: ако вземем 100 топки, няма да сме взели максимум 11 топки от един цвят и следователно задължително сме взели топка от всеки цвят. Но ако вземем всички зелени и бели топки, общо 87 топки, измежду тях няма да има три разноцветни.

Задача 3. *(4 точки)* Някои от градовете в една държава са свързани с директни автобусни маршрути. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг (с евентуални прехвърляния). Иван си купил по един билет за всеки директен маршрут (т.е. може да пътува по всеки маршрут веднъж независимо в коя посока). Петър купил по n билета за всеки маршрут. Иван и Петър отпътували от град A. Иван използвал всичките си билети, не купувал нови и накрая стигнал в град B. Петър известно време пътувал с купените от него билети и стигнал в град X, от който не може да продължи без да си купи нов билет. Докжете, че X е или A, или B.

Решение: Да отбележим, че във всеки град, различен от A и B, Иван е влизал толкова пъти, колкото е излизал; от началния град (A) той е излизал един път повече, отколкото е влизал, а в крайния град (B) той е влизал един път повече, отколкото е излизал. Тъй като при това Иван точно по веднъж е пътувал по всеки маршрут, то от всеки град, освен A и B, излизат четен брой маршрути, а от A и B – нечетен брой.
Нека Петър се е оказал в град C и не може да продължи. Това означава, че е изпозвал всички билети за всички маршрути, излизащи от C. Ако град C не е A или B, то от него излизат четен брой маршрути, да речем $2k$. Но тогава Петър е влизал и излизал от C четен брой пъти – $2kn$, редувайки влизане и излизане, и тъй като отначало е влязъл в C, то последния път е излязъл от C – противоречие. Следователно той е спрял или в A, или в B, което трябваше да докажем.

Задача 4. *(5 точки)* Дадени са окръжност и непресичаща я права. Как с помощта на пергел и линийка може да се построи квадрат, два съседни върха на който лежат на окръжността, а другите два – на дадената права (ако е известно, че такъв квадрат съществува)?

Решение: Нека O е центърът на дадената окръжност, а l е дадената права. (Точката O се построява като пресечем симетралите на две неуспоредни хорди.) През точка O построяваме перпендикулярна на l права и нека тя пресича l в точка K.
Построяваме произволен квадрат $A_1B_1C_1D_1$, старната A_1D_1 на който лежи на правата l и се разполовява от K, а квадратът лежи в тази полуравнина относно l, в която и окръжността. През K построяваме лъчите $KB_1^{\rightarrow}$ и $KC_1^{\rightarrow}$.
Ако $ABCD$ е търсеният квадрат, чиято страна AD лежи на правата l, то от съображения за симетрия е ясно, че K разполовява страната AD. От подобието на триъгълниците B_1KC_1 и BKC следва, че върхът B лежи на лъча $KA_1^{\rightarrow}$, а върхът C – на лъча $KC_1^{\rightarrow}$.
Така получаваме пътя за построяване на търсения квадрат. Нека лъчите $KA_1^{\rightarrow}$ и $KB_1^{\rightarrow}$ пресичат за пръв път окръжността в точките X и Y съответно. От точките X и Y спускаме перпендикуляри XZ и YT към l. Тогава $ZXYT$ е търсеният квадрат.
Ако съществуват втори точки на пресичане на лъчите с окръжността, те

определят още едно решение. (А лъчите пресичат окръжността, тъй като по условие решение съществува.)

Задача 5. *(5 точки)* По колко различни начина числото 2004 може да се представи като сбор на естествени числа (едно или няколко), които са приблизително равни? Две числа се наричат приблизително равни, ако разликата им е не повече от 1. Сборовете, кото се различават само по реда на събираемите, се смятат за еднакви.

Решение: Отговорът е 2004.

Първи начин. Да отбележим, че при всяко представяне на 2004 като сбор на приблизително равни събираеми, в сбора участват най-много две различни събираеми.

Ще докажем, че за всяко цяло число k от 1 до 2004 съществува единствено представяне на 2004 като сбор на k приблизително равни събираеми.

За да се представя 2004 като сбор на k числа, от които x числа са равни на m и y са равни на $m+1$ (като $x+y=k$ и нека $x>0$), трябва да е изпълнено равенството

$$2004 = mx + (m+1)y = mk + y,$$

където $0 \leq y < k$. Но оттук y се определя еднозначно – това е остатъкът при деление на 2004 на k, а тогава $x = k - y$.

Следователно представянията са общо 2004.

Втори начин. Ще докажем по индукция, че числото N може да се представи като сбор на приблизително равни събираеми по N начина.

Да отбележим, че във всяко такова представяне участват най-много две различни събираеми.

За числото 1 има едно представяне: с едно събираемо 1.

Нека твърдението е доказано за някое число N. Прибавяйки във всяко представяне на N единица към едно от по-малките събираеми (или към кое да е, ако всички са равни), получавме преставяне на числото $N+1$ (със същия брой събираеми). При това от различни представяния на числото N се получават различни представяния на $N+1$.

Обратно, ако във всяко представяне на $N+1$ (освен представянето като сбор на $N+1$ единици) едно от по-големите събираеми се намали с 1 (или, ако събираемите са равни, кое да е от тях се намали с 1), се получава представяне на N (със същия брой събираеми). При това от различни представяния на $N+1$ се получавт различни представяния на N.

Следователно броят на представянията на числото $N+1$ е с 1 по-голям от броя на представянията на N. По индукция твърдението е доказано.