XXVII МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур

Основен вариант за 10. – 12. клас

Резултатът се определя от трите задачи, по които са постигнати най-високи резултати.

точки задача

3

1. За кои n съществуват различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които сборът

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$$

е естествено число?

2. По ръбовете на многоъгълна маса пълзят две мравки. Всички страни (ръбове) на масата са по-големи от 1 м, а разстоянието между мравките е равно винаги на 10 см. Първоначално и двете мравки се намират на една от страните на масата.

2

а) Нека масата има форма на изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от всяка мравка?

4

б) Нека масата е с форма на не задължително изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от поне една мравка?

5

3. Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)

6

4. Докажете, че ако $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ са реални числа, то е в сила неравенството

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \geq 4n(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n).$$

6

5. По окръжност са записани няколко положителни числа, всяко от които е не по-голямо от 1. Докажете, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че сборът от числата, записани на всяка дъга, да се различава от сбора на записаните на коя да е друга дъга числа с не повече от 1. (Ако на дъгата няма числа, сборът от записаните на нея числа се приема за 0.)

7

6. Даден е триъгълник ABC с ъглополовящи AA_1, BB_1 и CC_1, за който $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 1$. Докажете, че $A_1B_1 = A_1C_1$.

8

7. За един ход на дъска се записват или две единици, или се изтриват две вече написани еднакви числа n и вместо тях се записват $n + 1$ и $n - 1$. Най-малко за колко хода на дъската може да се получи числото 2005? (Първоначално на дъската не е записано нищо.)