XXVII МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур

Основен вариант за 7. – 9. клас

Резултатът се определя от трите задачи, по които са постигнати най-високи резултати.

точки	задача	
3	1.	Естествено число, което се чете по един и същ начин от ляво на дясно и от дясно на ляво, се нарича *палиндром* (например, 1, 343 и 2002 са палиндроми, а 2005 не е). Съществуват ли 2005 двойки от вида $(n, n+110)$, в които и двете числа са палиндроми?
5	2.	Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AD = BC$. Продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка K, а M и N са среди съответно на страните AB и CD. Докажете, че триъгълникът MNK е тъпоъгълен.
6	3.	Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)
	4.	По ръбовете на многоъгълна маса пълзят две мравки. Всички страни (ръбове) на масата са по-големи от 1 м, а разстоянието между мравките е равно винаги на 10 см. Първоначално и двете мравки се намират на една от страните на масата.
2	а)	Нека масата има форма на изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от всяка мравка?
4	б)	Нека масата е с форма на не задължително изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от поне една мравка?
7	5.	Намерете най-голямото естествено число N, за което уравнението $99x + 100y + 101z = N$ има единствено решение (x, y, z) в естествени числа.
7	6.	Докажете, че ако $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le y_1 \le y_2 \le y_3 \le y_4$ са реални числа, то е в сила неравенството $$(x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4)^2 \ge 16(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4).$$
8	7.	Карлсон има 1000 буркана със сладко. Бурканите не са задължително еднакви, но всеки от тях съдържа не повече от 1% от всичкото сладко. За закуска Карлсон може да изяде по едно и също количество сладко от кои да е 100 буркана. Докажете, че Карлсон може да закусва така, че за няколко дни да изяде всичкото сладко.