Основен вариант, 10. – 12. клас

Задача 1. *(3 точки)* За кои n съществуват различни естествени числа a_1, $a_2, \ldots, a_n$, за които сборът

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$$

е естествено число?

Решение: Ще докажем, че $n = 1$, $n > 2$.
При $n = 1$ отношението $\dfrac{a_1}{a_1} = 1$ е естествено число.
Да предположим, че съществуват различни естествени числа a_1 и a_2, такива, че $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1}$ е естествено число. Нека $k =$НОД(a_1, a_2), тогава $a_1 = kp$, $a_2 = kq$, където НОД$(p, q) = 1$. Получаваме, че $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} = \dfrac{p^2 + q^2}{pq}$ също е естествено, т.е. $pq/p^2 + q^2$. Следователно $p/p^2 + q^2$ и $q/p^2 + q^2$, т.е. p/q^2 и q/p^2. Тъй като НОД$(p, q) = 1$, получаваме, че $p = 1$ и $q = 1$ – противоречие.
Нека $n > 2$. За a_1, a_2, $\ldots$, a_n, равни на 1, $n-1$, $(n-1)^2, \ldots, (n-1)^{n-1}$ сборът

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} &= \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{(n-1)^2} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} + \frac{(n-1)^{n-1}}{1} \\
&= (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = 1 + (n-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

е естествено число.

Задача 2. *(6 точки)* По ръбовете на многоъгълна маса пълзят две мравки. Всички страни (ръбове) на масата са по-големи от 1 м, а разстоянието между мравките е равно винаги на 10 см. Първоначално и двете мравки се намират на една от страните на масата.
а) *(2 точки)* Нека масата има форма на изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от всяка мравка?
б) *(4 точки)* Нека масата е с форма на не задължително изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от поне една мравка?

Решение: а) Ще докажем, че такъв обход не винаги е възможен.
Нека $ABCD$ е ромб със страна 10 м и диагонал $AC = 1$ см, разположен в правоъгълна координатна система така, че AC лежи върху абсцисата и точка B има положителна ордината. Във всеки момент от движението на мравките разглеждаме вектора, свързващ първата и втората мравка. Този вектор разлагаме като сбор от вертикална и хоризонтална компонента.

Да предположим, че и двете мравки са преминали през точка B. Когато първата мравка се е намирала в точка B, векторът, свързващ първата мравка с втората, е сочел ”надолу” (т.е. е имал вертикална компонента надолу).

Когато в точка B се е намирала втората мравка, този вектор е сочел ”нагоре”. От съображения за непрекъснатост следва, че в даден момент векторът, свързващ двете мравки е бил хоризонтален, което е невъзможно: в най-широкото си място ромбът има ширина 1 см.

б) Ще докажем, че такъв обход не винаги е възможен. Нека $ABCD$ е неизпъкнал четириъгълник със страни $AB = BC > 10$ м и $AD = DC > 10$ м, такъв,че $BD = AC = 1$ см, а M е точка от AB, такава, че $AM = 10$ см. Ще считаме, че четириъгълникът е разположен в правоъгълна координатна система така, че AC лежи върху абсцисата, BD – върху ординатата, като точка B има положителна ордината.

Нека първата мравка се намира в точка A, втората – в M. Ще обясним защо нито една от мравките никога няма да се окаже в точка C. Както в а) получаваме, че втората мравка никога не може да попадне в точка C. Аналогично, първата мравка не може да попадне в точките B и D, тъй като за тях няма да се намерят ”по-високи” точки върху страните на многоъгълника на разстояние 10 см, в които може да се постави втората мравка. Но ако първата мравка е била в точка C, то в някакъв момент тя е преминала през B или D, а ние доказахме, че това е невъзможно.

Задача 3. *(5 точки)* Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)

Решение: Ще докажем, че могат да се свалят най-много 59 топа.
Първо да отбележим, че нито един от топовете в ъгловите полета не може да се свали. Да допуснем, че първо е свален "ъгловият" топ от $a1$. В момента преди свалянето си той е заплашвал два топа: някой от намиращите се на линия a (там е поне $a8$) и някой от намиращите се на линия 1 (там е поне $h1$). Противоречие.
Ако на дъската са само ъгловите топове, то няма поле, което се заплашва от нечетен брой топове. Следователно не можем да оставим само четирите ъглови топа (иначе последният свален топ ще е заплашвал 0 или 2 топа).
Следователно поне 5 от 64-те топа ще останат на дъската. Ето как последователно могат да се свалят 59 топа: $a7, a6, b6, a5, b5, c5, a4, b4, c4, d4, a3, b3, c3, d3, e3, a2, b2, c2, d2, e2, f2, b1, c1, d1, e1, f1, g1, c8, d8, e8, f8, g8, d7, e7, f7, g7, h7, e6, f6, g6, h6, f5, g5, h5, g4, h4, h3, h2, g2, g3, f3, f4, e4, e5, d5, d6, c6, c7, b7$.

Задача 4. *(6 точки)* По окръжност са записани няколко положителни числа, всяко от които е не по-голямо от 1. Докажете, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че сборът от числата, записани на всяка дъга, да се различава от сбора на записаните на коя да е друга дъга числа с не повече от 1. (Ако на дъгата няма числа, сборът от записаните на нея числа се приема за 0.)

Решение: Условието на задачата е еквивалентно на това, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че разликата между най-големия и най-малкия сбор да е по-малка от 1.
Разделяме окръжността на три произволни дъги A_0, B_0 и C_0 със сборове на записаните на тях числа съответно a, b и c, $a \leq b \leq c$. По-нататък ще действаме по следния начин: Ако $c - a > 1$, преместваме границата между дъгите A и C така, че точно едно число от дъгата C да премине на дъгата A. Нека това число е r. След тази операция получаваме нови дъги A_1, B_1 и C_1 със сборове $a + r$, b, $c - r$.
Да разгледаме тройките $S_1 = \{a, b, c\}$ и $S_2 = \{a + r, b, c - r\}$.
Ако $a = b < c$, тъй като $a < c - 1 \leq c - r$, то най-малкият сбор в S_2 $b(= a)$, т.е. равен е на най-малкия сбор в S_1. Най-големият сбор в S_2 е по-малък от най-големия сбор c в S_1, тъй като всяко от числата в S_2 е по-малко от c.
Ако $a < b \leq c$, от неравенствата $a + r \leq a + 1 < c$, $b \leq c$, $c - r < c$ следва, че всеки сбор в S_2 (а значи и най-големият) не надхвърля най-големия сбор c в S_1. От друга страна, $a < a + r$, $a < b$ и $a < c - 1 \leq c - r$, т.е. всеки сбор в S_2 (а значи и най-малкият) е по-голям от най-малкия сбор a в S_1.

И в двата случая разликата между най-големия и най-малкия сбор намалява при второто разделяне на окръжността. Тъй като разглежданите числа са краен брой, то разликата между тези сборове не може постоянно да намалява и следователно настъпва момент, когато тя става по-малка от 1.

Задача 5. *(7 точки)* Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 1$. Ако AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи в $\triangle ABC$, докажете, че $A_1B_1 = A_1C_1$.

Решение: Нека I е пресечната точка на ъглополовящите и $\angle C = \alpha, \angle B = 2\alpha, \angle A = 4\alpha$. Следователно $7\alpha = 180^\circ$.
Тъй като $\angle A_1BA = \angle A_1AB = 2\alpha$, то $BA_1 = AA_1 = x$. В $\triangle BAA_1$ имаме $\angle BA_1A = 180^\circ - 4\alpha = 3\alpha$ и в $\triangle BA_1I$ тогава $\angle BIA_1 = 180^\circ - 4\alpha = 3\alpha$, следователно $BA_1 = BI = x$.
От друга страна, в $\triangle BB_1A$ имаме $\angle BB_1A = 180^\circ - 5\alpha = 2\alpha$ и тогава $IA = IB_1 = y$. Също, в $\triangle AC_1C$ имаме $\angle AC_1C = 180^\circ - \dfrac{9}{2}\alpha = \dfrac{5}{2}\alpha$ и тогава в $\triangle IC_1A$ намираме $\angle C_1IA = 180^\circ - \dfrac{9}{2}\alpha = \dfrac{5}{2}\alpha$, т.е. $AC_1 = IA = y$.
Още един равнобедрен триъгълник е $\triangle B_1BC$ ($\angle BB_1C = \angle B_1CB = \alpha$) и следователно $B_1C = BB_1 = x + y$.
Върху отсечката B_1C избираме точка T така, че $\angle AA_1T = 3\alpha$. От еднаквостта на $\triangle AA_1B$ и $\triangle AA_1T$ следва, че $A_1T = A_1B = x$ и $\angle ATA_1 = 2\alpha$. Също, $\angle TA_1C = 180^\circ - 6\alpha = \alpha$, следователно $A_1T = TC = x$. Тогава $B_1T = B_1C - TC = y$. Сега триъгълниците $\triangle A_1TB_1$ и $\triangle A_1AC_1$ са еднакви, откъдето $A_1B_1 = A_1C_1$.

Задача 6. *(8 точки)* За един ход на дъска се записват или две единици, или се изтриват две вече написани еднакви числа n и вместо тях се записват $n+1$ и $n-1$. Най-малко за колко хода на дъската може да се получи числото 2005? (Първоначално на дъската не е записано нищо.)

Решение: Ще докажем, че минималният брой ходове е $\dfrac{1}{2}(2005^2 + 2003^2 + 2002^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 1^2) = 1342355520$.
Забелязваме, че при всеки ход сборът от квадратите на записаните числа се увеличава с 2. Това е така и когато записваме две единици, и когато заменяме n и n с $n-1$ и $n+1$ (тъй като $(n-1)^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2$). Следователно сборът от квадратите на записаните числа е четен.
Ще докажем, че ако сме получили числото 2005 след минимален брой ходове, то на дъската са записани и $2003, 2002, \ldots, 2, 1$. Да допуснем противното: нека числото $n < 2004$ го няма на дъската. Всяко по-малко от 2005 число n се е появило в определен момент на дъската – иначе не биха се появили и числата $n+1, n+2, \ldots, 2005$. Да разгледаме момента, в който n за последен път е било изтрито. На този ход са записани числата $n+1$ и $n-1$. Тъй като броят на ходовете е минимален, можем да твърдим, че или $n+1 = 2005$, или $n+1$ ще се използва в бъдеще. В първия случай $n = 2004$, а във втория при

използването на числото $n+1$ числото n отново ще се появи на дъската – противоречие.

Тъй като $2005^2+2003^2+\cdots+2^2+1^2=2005^2+\dfrac{2003\cdot 2004\cdot 4007}{6}=2005^2+2003\cdot 334\cdot 4007$ е нечетно число, а сборът от квадратите на записаните числа е четен, то освен $2005, 2003, 2002, \ldots, 2, 1$, на дъската трябва да присъства поне още едно ненулево число. Понеже всеки ход увеличава сбора от квадратите на записаните числа с 2, то минималният брой ходове, необходими за появяването на 2005, е равен на $\dfrac{1}{2}(2005^2+2003^2+2002^2+...+2^2+1^2+1^2)$ (когато ненулевите числа на дъската са $2005, 2003, 2002, \ldots, 2, 1, 1$).

По индукция ще докажем, че при $n=4l+2$ или $4l+3$ на дъската могат да се появят $n, n-2, \ldots, 3, 2, 1$, а при $n=4l$ или $4l+1$ – числата $n, n-2, \ldots, 3, 2, 1, 1$. (Записаните нули не се разглеждат.)

При $n=1$ е твърдението вярно $(1, 1$ след първия ход).

Нека то е вярно за $n=k$; ще го докажем за $n=k+1$. Ще разгледаме само случая $k=4l$, а останалите разсъждения са аналогични. Според предположението на индукцията, можем да получим $4l, 4l-2, \ldots, 2, 1, 1$. Изтриваме две единици и записваме 2 и 0, след това изтриваме две 2 и записваме 3 и 1, и т.н., докато изтрием $4l-2$ и $4l{-}2$ и запишем $4l-1$, $4l-3$. В този момент на дъската са записани числата $4l, 4l-1, 4l-2, \ldots, 3, 2, 1$. Сега ще напишем две единици и ще извършим същите действия: 1 и 1 заменяме с 2 и 0; 2 и 2 заменяме с 3 и 1 и т.н., докато $4l$ и $4l$ заменим с $4l+1$ и $4l-1$. В резултат на това на дъската (от ненулевите числа) ще останат само $4l+1, 4l-1, 4l-2, \ldots 3, 2, 1, 1$.