Основен вариант, 7. – 9. клас

Задача 1. *(3 точки)* Естествено число, което се чете по един и същ начин от ляво на дясно и от дясно на ляво, се нарича *палиндром* (например, 1, 343 и 2002 са палиндроми, а 2005 не е). Съществуват ли 2005 двойки от вида $(n, n+110)$, в които и двете числа са палиндроми?

Решение: Числото $n = 119\ldots911$, където вместо многоточието има произволен брой деветки, е палиндром. Числото $n+110$ има вида $120\ldots021$ (вместо многоточието има някакъв брой нули) и очевидно също е палиндром. Следователно съществуват безброй много числа n от споменатия вид.

Задача 2. *(5 точки)* Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AD = BC$. Продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка K, а M и N са среди съответно на страните AB и CD. Докажете, че триъгълникът MNK е тъпоъгълен.

Решение: Ще използваме следния факт: ако за $\triangle XYZ$ и $\triangle X'Y'Z'$ са изпълнени равенствата $XY = X'Y'$ и $YZ = Y'Z'$, то от $\angle XYZ < \angle X'Y'Z'$ следва $XZ < X'Z'$ и обратно (докажете!).
Нека точките B и C са по-близо до точката K, отколкото A и D съответно. Да предположим, че двата ъгъла $\angle KMN$ и $\angle KNM$ са остри (ако допуснем, че някой от тях е прав, лесно получаваме $AB||CD$ – противоречие). Тогава в $\triangle MNC$ и $\triangle MND$ страната MN е обща, $NC = ND$, $\angle MNC < \angle MND$. Следователно $MC < MD$. Аналогично $NB < NA$.

За $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$ имаме: $BC = AD$, $BM = AM$, $MC < MD$, следователно $\angle MBC < \angle MAD$. Аналогично $\angle NCB < \angle NDA$.
По такъв начин доказахме, че $\angle ABC + \angle DCB < \angle BAD + \angle CDA = 180° - \angle K$, но

$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle DCB &= (180° - \angle KBC) + (180° - \angle KCB) \\
&= 360° - (\angle KBC + \angle KCB) = 360° - (180° - \angle K) \\
&= 180° + \angle K > 180° - \angle K.
\end{aligned}$$

Противоречие.

Задача 3. *(6 точки)* Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)

Решение: Ще докажем, че могат да се свалят най-много 59 топа.
Първо да отбележим, че нито един от топовете в ъгловите полета не може да се свали. Да допуснем, че първо е свален "ъгловият" топ от $a1$. В момента преди свалянето си той е заплашвал два топа: някой от намиращите се на линия a (там е поне $a8$) и някой от намиращите се на линия 1 (там е поне $h1$). Противоречие.
Ако на дъската са само ъгловите топове, то няма поле, което се заплашва от нечетен брой топове. Следователно не можем да оставим само четирите ъглови топа (иначе последният свален топ ще е заплашвал 0 или 2 топа).
Следователно поне 5 от 64-те топа ще останат на дъската. Ето как последователно могат да се свалят 59 топа: $a7, a6, b6, a5, b5, c5, a4, b4, c4, d4, a3, b3, c3, d3, e3, a2, b2, c2, d2, e2, f2, b1, c1, d1, e1, f1, g1, c8, d8, e8, f8, g8, d7, e7, f7, g7, h7, e6, f6, g6, h6, f5, g5, h5, g4, h4, h3, h2, g2, g3, f3, f4, e4, e5, d5, d6, c6, c7, b7$.

Задача 4. *(6 точки)* По ръбовете на многоъгълна маса пълзят две мравки. Всички страни (ръбове) на масата са по-големи от 1 м, а разстоянието между мравките е равно винаги на 10 см. Първоначално и двете мравки се намират на една от страните на масата.
а) *(2 точки)* Нека масата има форма на изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от всяка мравка?
б) *(4 точки)* Нека масата е с форма на не задължително изпъкнал многоъгълник. Винаги ли е възможно мравките да пропълзят по страните на многоъгълника така, че всяка точка по края на масата да е обходена от поне една мравка?

Решение: а) Ще докажем, че такъв обход не винаги е възможен.
Нека $ABCD$ е ромб със страна 10 м и диагонал $AC = 1$ см, разположен в правоъгълна координатна система така, че AC лежи върху абсцисата и точка B има положителна ордината.

Във всеки момент от движението на мравките разглеждаме вектора, свързващ първата и втората мравка. Този вектор разлагаме като сбор от вертикална и хоризонтална компонента.

Да предположим, че и двете мравки са преминали през точка B. Когато първата мравка се е намирала в точка B, векторът, свързващ първата мравка с втората, е сочел "надолу" (т.е. е имал вертикална компонента надолу). Когато в точка B се е намирала втората мравка, този вектор е сочел "нагоре". От съображения за непрекъснатост следва, че в даден момент векторът, свързващ двете мравки е бил хоризонтален, което е невъзможно: в най-широкото си място ромбът има ширина 1 см.

б) Ще докажем, че такъв обход не винаги е възможен. Нека $ABCD$ е неизпъкнал четириъгълник със страни $AB = BC > 10$ м и $AD = DC > 10$ м, такъв,че $BD = AC = 1$ см, а M е точка от AB, такава, че $AM = 10$ см. Ще считаме, че четириъгълникът е разположен в правоъгълна координатна система така, че AC лежи върху абсцисата, BD – върху ординатата, като точка B има положителна ордината.

Нека първата мравка се намира в точка A, втората – в M. Ще обясним защо нито една от мравките никога няма да се окаже в точка C. Както в а) получаваме, че втората мравка никога не може да попадне в точка C. Аналогично, първата мравка не може да попадне в точките B и D, тъй като за тях няма да се намерят "по-високи" точки върху страните на многоъгълника на разстояние 10 см, в които може да се постави втората мравка. Но ако първата мравка е била в точка C, то в някакъв момент тя е преминала през B или D, а ние доказахме, че това е невъзможно.

Задача 5. *(7 точки)* Намерете най-голямото естествено число N, за което уравнението $99x + 100y + 101z = N$ има единствено решение (x, y, z) в естествени числа.

Решение: Ще докажем, че търсеното число е 5251. Нека (x, y, z) е единствено решение на даденото уравнение за някое N. Тогава:
– първо, $x = 1$ или $z = 1$ – иначе $(x - 1, y + 2, z - 1)$ също е решение;
– второ, $y \leq 2$ – иначе $(x + 1, y - 2, z + 1)$ също е решение.

Това означава, че единственото решение на уравнението има един от следните четири вида: 1) $(x,1,1)$; 2) $(x,2,1)$; 3) $(1,1,z)$; 4) $(1,2,z)$. Във всеки от тези случаи ще намерим най-голямото възможно N.

1) $99x+100+101=N$. Нека при това N съществува друго решение в естествени числа: $99x+100+101=99x_0+100y_0+101z_0$ (където $x>x_0\geq 1, y_0\geq 1, z_0\geq 1$), т.е. $99(x-x_0)=100(y_0-1)+101(z_0-1)$. Това означава, че е в сила равенството $99x'=100y'+101z'$ $(0<x'<x, y'\geq 0, z'\geq 0)$. Нека най-малкото възможно x' е равно на x'_0 (и се получва при y'_0 и z'_0). Това число ще бъде най-голямото x, недопускащо още едно решение: наистина, при $x=x'_0+a$, където a е естествено число, освен решението $(x,1,1)$, имаме решение $(a,1+y'_0,1+z'_0)$, а при $x=x'_0$ друго решение няма да съществува, тъй като на него ще съответства $x'<x=x'_0$.

Сега ще намерим x'_0. Имаме $99x'=100y'+101z'=99(y'+z')+y'+2z'$, следователно $y'+2z'$ се дели на 99. Числото x' ще бъде най-малко при $y'+2z'=99$ (действително, ако $y'+2z'\geq 198$, то $y'+z'\geq 99$, което дава доста по-голямо x'). При такова условие x' ще бъде най-малко при най-малък сбор $y'+z'$, т.е. $y'_0=1, z'_0=49$. Оттук за x получаваме $x'_0=(100+101\cdot 49)/99=51$. Тогава $N=99\cdot 51+100\cdot 1+101\cdot 1=5250$.

2) $99x+100\cdot 2+101=N$. Аналогично на 1), наличието на друго решение означава, че е в сила равенството $99x'+100=100y'+101z'$ $(0<x'<x, y'\geq 0, z'\geq 0)$. Случаят $y'\geq 1$ вече е разгледан в 1). Предполагаме, че $y'=0$ и $99x'+100=101z'$. Получаваме $99(x'-z'+1)=2z'-1$. Най-малкото z', при което такова равенство е възможно, очевидно е равно на 50, откъдето най-малкото x' ще бъде равно на $(101\cdot 50-100)/99=50$. В този случай за N получаваме $N=99\cdot 50+100\cdot 2+101\cdot 1=5251$.

3) $99+100+101z=N$. Наличието на друго решение означава, че е в сила равенството $101z'=99x'+100y'$ $(0<z'<z, x'\geq 0, y'\geq 0)$. Аналогично на 1) търсим най-малкото възможно z'. Имаме $101z'=101(x'+y')-2x'-y'$, следователно $2x'+y'$ се дели на 101. Ако $2x'+y'\geq 202$, то $(x'+y')\geq 101$, което дава доста по-голямо z', отколкото при $2x'+y'=101$. И така, $x'_0=50, y'_0=1$, затова $z'_0=(99\cdot 50+100)/101=50$ и $N=99+100+101\cdot 50=5249$.

4) $99+100\cdot 2+101z=N$. Наличието на друго решение означава, че е в сила равенството $101z'+100=99x'+100y'$ $(0<z'<z, x'\geq 0, y'\geq 0)$. Случаят $y'\geq 1$ вече е разгледан в 1). Следователно $y'=0$ и $101z'+100=99x'$. Получаваме $99(x'-z'-1)=2z'+1$. Най-малкото z', при което такова равенство е възможно, е равно на 49 (при $x'_0=51$), откъдето $N=99+100\cdot 2+101\cdot 49=5248$.

Задача 6. *(8 точки)* Карлсон има 1000 буркана със сладко. Бурканите не са задължително еднакви, но всеки от тях съдържа не повече от 1% от всичкото сладко. За закуска Карлсон може да изяде по едно и също количество сладко от кои да е 100 буркана. Докажете, че Карлсон може да закусва така, че за няколко дни да изяде всичкото сладко.

Решение: Ще докажем твърдението по индукция.
Да предположим, че Карлсон може да изяде всичкото сладко, ако вместо 100 и $\frac{1}{100}$ в условието имаме 99 и $\frac{1}{99}$ (общото количество буркани не е важно, главното е, че те са достатъчно много, не по-малко от 100). (Ще наричаме тези задачи съответно "задача-100" и "задача-99".) Ще обясним как тогава той действа в случая на задача-100.
Карлсон мислено разделя бурканите със сладко на две части: най-големия (по количество на сладкото) и "всички останали". Да отбележим, че за "всички останали" буркани се изпълнява условието на задача-99 (в "останалите" буркани сладкото е не по-малко от $\frac{99}{100}$ от цялото сладко и във всеки от "останалите" буркани е не повече от $\frac{1}{100}$ от цялото сладко, т.е. не повече от $\frac{1}{100} : \frac{99}{100} = \frac{1}{99}$ от количеството сладко в "останалите" буркани).
Затова Карлсон може да действа така: да изяде от "останалите" буркани всичкото сладко по алгоритъма на "задача-99", като на всяка стъпка взема 99 буркана от "останалите" и добавя стотния буркан – "най-големият". За да свърши едновременно сладкото в "най-големия" буркан и във "всички останали", е необходимо в него да има точно 99 пъти по-малко сладко, отколкото във "всички останали" взети заедно (тъй като от него всеки път ще се изяжда 99 пъти по-малко, отколкото от "останалите"). Тоест е необходимо в най-големия буркан първоначално да е имало точно $\frac{1}{100}$ част от общото количество сладко.
Ако в най-големия буркан има по-малко от $\frac{1}{100}$ от общото количество сладко, Карлсон избира 100 непразни буркана от "всички останали" и изяжда от тях някакво количество сладко. При това частта сладко в най-големия буркан се увеличава. Ще покажем как трябва да действа той, за да направи тази част точно $\frac{1}{100}$. Ако количеството сладко в най-малкия буркан (от избраните сто) позволява да се изяде част от сладкото така, че частта на най-големия буркан да стане равна на $\frac{1}{100}$, той прави така. Иначе изяжда всичкото сладко от най-малкия буркан, намалявайки количеството на непразните буркани. Карлсон спира или когато постигне целта, или когато непразните буркани сред "всички останали" станат по-малко от 100. Но последният случай е невъзможен, тъй като частта на най-големия буркан е не по-малка от $\frac{1}{100}$, т.е. Карлсон е трябвало да спре по-рано.
За да завършим решението, остава да отбележим, че ние се научихме да свеждаме "задача-100" към "задача-99", но по същия начин може да я сведем сега към "задача-98", нея – към "задача-97", и т.н. А "задача-1" е очевидна.