Тренировъчен вариант, 10. – 12. клас

Задача 1. *(3 точки)* Може ли два точни куба да се разположат между два поредни точни квадрата? С други думи, съществуват ли цели числа a, b и n, за които $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

Решение: Ще докажем, че не съществуват числа с исканото свойство.
Да допуснем, че съществуват естествени числа a, b, n, за които е в сила $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$. Тъй като $a+1 \leq b$, то $n^2 < a^3 < (a+1)^3 \leq b^3 < (n+1)^2$. Следователно $(n+1)^2 - n^2 > (a+1)^3 - a^3$, т.е. $2n+1 > 3a^2+3a+1$, откъдето $2n > 3a^2 + 3a$. Повдигайки на квадрат, получаваме $4n^2 > 9a^4 + 18a^3 + 9a^2$. Тъй като $n^2 < a^3$, то $4a^3 > 9a^4 + 18a^3 + 9a^2$, което е невъзможно.

Задача 2.*(3 точки)* Дадена е отсечка с дължина $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Може ли с помощта на линийка без деления и пергел, да се построи отсечка с дължина 1?

Решение: Ще докажем че е възможно да се построи отсечка с дължина 1.
От отсечка с дължина a можем да построим $AB = a(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ (като построим отсечка с дължина $a\sqrt{2}$ като диагонал на квадрат със страна a, след това $a\sqrt{3}$ като диагонал на правоъгълника $a \times a\sqrt{2}$, след това $a\sqrt{5}$ като диагонал на правоъгълника $a\sqrt{2} \times a\sqrt{3}$).
Нека $AC = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, и C не лежи на AB. Върху отсечката AB избираме точка D така, че $AD = a$. Построяваме права $DE||BC$ (E лежи на AC). От подобието на триъгълниците ABC и ADE имаме, че $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$, т.е. $AE = \dfrac{AC.AD}{AB} = 1$.

Задача 3. *(4 точки)* Дадени са шест монети, една от които е фалшива (ралична по тегло от останалите). Как може да се намери фалшивата монета с три претегляния, ако всяко претегляне отчита общото тегло на теглените монети?

Решение: Да означим монетите с a, b, c, d, e, f. Първо претегляме $X = a+b$, след това – $Y = c+d$.

Ако $X = Y$, то претегляме e. Ако $e = \dfrac{X}{2}$, то f е фалшивата, иначе e е фалшивата.

Ако $X > Y$, то e и f са истински. Претегляме $Z = a+c+e$. Сега, ако $Z = \frac{3}{2}X$, то монетите в X и Z са истински, а d е фалшива. Ако $Z = \frac{3}{2}Y$, то монетите в Y и Z са истински, а b е фалшива. Ако Z не е равно нито на $\frac{3}{2}X$, нито на $\frac{3}{2}Y$, то фалшивата монета е в Z (a или c). Тогава или $Z = X + \frac{1}{2}Y$ (и фалшивата е a), или $Z = \frac{1}{2}X + Y$ (и фалшивата е c).
Ако $X < Y$, разсъждаваме аналогично.

Задача 4. *(4 точки)* На страните на правоъгълен триъгълник ABC са построени външно квадрати с центрове D, E, F. Докажете, че отношението на лицата на триъгълниците S_{DEF}/S_{ABC} е:
а) по-голямо от 1; *(2 точки)*
б) не по-малко от 2. *(2 точки)*
Решение: Ще докажем подточка б) (тогава а) следва автоматично).
Нека $\angle A = 90°$, а D, E, F са центрове на квадратите със страна AC, AB, BC съответно. Тъй като $\angle DAC + \angle CAB + \angle BAE = 180°$, то $A \in DE$. Освен това, AF е ъглополовяща на $\angle BAC$ (от $\angle CAB = \angle CFB = 90°$ следва, че около четириъгълника $ACFB$ може да се опише окръжност и оттук $\angle CAF = \angle CBF = 45°$). Следователно $AF \perp DE$ и $S_{DEF} = \frac{1}{2}DE \cdot AF$.

Ако $AC = a$ и $AB = b$, намираме $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$. За AF по теоремата на Птоломей за вписания четириъгълник $ACFB$ имаме $AF = \frac{AB.FC + AC.FB}{BC}$ и тъй като $BF = FC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, то $AF = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Освен това, $DE = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и така $S_{DEF} = \frac{(a+b)^2}{4}$. Неравенството $S_{DEF}/S_{ABC} \geq 2$ е еквивалентно на $(a+b)^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0$, което е очевидно.

Задача 5. *(5 точки)* На маса лежи куб. След няколко претъркулвания (през ръб), кубът се оказва на първоначалното си място, обърнат нагоре със същата стена, както в началото. Възможно ли е горната стена да се е завъртяла на 90 градуса спрямо началното си положение?

Решение: Ще докажем, че такава ситуация е невъзможна.
Нека е даден куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При претъркулване на куба тетраедърът ACB_1D_1 преминава в тетраедър, получаващ се от BDA_1C_1 чрез транслация; и обратно, BDA_1C_1 преминава в тетраедър, получаващ се чрез транслация от ACB_1D_1. За да върнем куба на първоначалното му място, трябва да го претъркулим четен брой пъти (може да смятаме, че кубът се претъркулва по шахматна дъска – тогава при всяко претъркулване цветът на лежащата на масата стена се сменя).
Да допуснем, че описаната в условието ситуация е възможна. Тогава след четен брой претъркулвания тетраедърът ACB_1D_1 се е върнал в първоначалното си положение. При завъртане на горната стена на 90° обаче AC преминава в BD, а тази отсечка не принадлежи на ACB_1D_1. Противоречие.