Тренировъчен вариант, 7. – 9. клас

Задача 1. *(3 точки)* Даден е триъгълник ABC. Точките M_1, M_2 и M_3 са среди съответно на страните AB, BC и AC, а H_1, H_2 и H_3 са пети на височините към AB, BC и AC. Докажете, че отсечките H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 могат да образуват триъгълник.

Решение: Достатъчно е да докажем, че за отсечките H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 е изпълнено неравенството на триъгълника.
В правоъгълния $\triangle CH_1B$ отсечката H_1M_2 е медиана към хипотенузата, следователно $H_1M_2 = \dfrac{1}{2}BC$. Аналогично $H_2M_3 = \dfrac{1}{2}AC$, $H_3M_1 = \dfrac{1}{2}AB$. Разделяйки неравенствата на триъгълника за $\triangle ABC$ на 2, получаваме

$$H_3M_1 + H_1M_2 > H_2M_3,\ H_1M_2 + H_2M_3 > H_3M_1,\ H_2M_3 + H_3M_1 > H_1M_2,$$

което трябваше да докажем.

Задача 2. *(3 точки)* Във всеки връх на куб е записано число. За един ход всяко число се заменя със средното аритметично на числата, които са записани в трите му съседни върха (замяната става едновременно). На десетия ход във всеки връх на куба се оказва отново числото, което е записано там в началото. Следва ли оттук, че всички числа са равни?

Решение: Възможно е записаните числа да са различни. Например, нека във върховете A, C, B_1, D_1 на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ запишем 0, а във върховете B, D, A_1, C_1 запишем 1. След първия ход във върховете, в които е била записана 1, ще стои 0 и обратно, а след втория ход във всеки връх ще се окаже изходното число (а значи и след 10 хода също).

Задача 3. *(4 точки)* Единична отсечка е разделена на 11 отсечки, дължината на всяка от които не надхвърля a. При кои стойности на a може да се твърди, че всеки три от тези отсечки могат да образуват триъгълник?

Решение: Ще докажем, че $\dfrac{1}{11} \leq a < \dfrac{1}{10}$. Нека $a_1, \ldots, a_{11}$ са дължините на получените отсечки. Тогава $1 = a_1 + \ldots + a_{11} \leq 11a$, откъдето $a \geq \dfrac{1}{11}$.
Ако $a \geq \dfrac{1}{10}$, съществува разделяне, при което не всеки три отсечки образуват триъгълник. Например, при $a_1 = \cdots = a_9 = \dfrac{1}{10}$, $a_{10} = a_{11} = \dfrac{1}{10}$ отсечките a_9, a_{10}, a_{11} не образуват триъгълник.
Остана да докажем, че за всяко $a \in \left[\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{10}\right)$ условието на задачата се изпълнява. Да допуснем, че има три отсечки $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, които не образуват триъгълник. Следователно $a_1 \geq a_2 + a_3$. Но

$$a \geq a_1 \geq a_2 + a_3 = 1 - a_1 - a_4 - a_5 - \cdots - a_{11} \Longrightarrow$$
$$9a \geq a_1 + a_4 + a_5 + ... + a_{11} \geq 1 - a \Longrightarrow a \geq \frac{1}{10},$$

противоречие.

Задача 4. *(4 точки)* Шахматна фигура се мести на 8 или 9 полета в хоризонтално или вертикално направление по дъска 15×15, като във всяко поле може да се постави най-много по един път. Колко най-много полета може да обходи фигурата? (Няма ограничение от кое поле да започне обхождането.)

Решение: Ще докажем, че могат да се обходят най-много 196 полета.
На всяко поле съпоставяме двойка числа $(i, j), i, j = 1, \ldots, 15$, като първото е вертикалната координата (отгоре надолу), а второто е хоризонталната координата (отляво надясно).
Да започнем обхождането от поле $(9, 7)$ по следните правила:
1) От поле в горната половина на дъската се преместваме или с 8 полета надясно, или с 9 полета наляво, ако поне една от тези операции е възможна (тъй като $9 + 8 > 15$, не са възможни и двете!). Ако и двете са невъзможни, се преместваме с 9 полета надолу.
2) От поле в долната половина на дъската се преместваме или с 9 полета надясно, или с 8 полета наляво, ако е възможно. Ако не е, се преместваме с 8 полета нагоре.
Лесно се проверява, че така ще обходим всички полета на дъската, освен полетата от вида $(i, 8)$ и $(8, j)$ (образуващи "кръст"), т.е. общо 196 полета.
Ако при някое обхождане попаднем в поле от "кръста", ясно е, че и на предишния, и на следващия ход сме "на кръста". Това означава, че обхождането включва не повече от 29 полета. Следователно 196 е максималният брой обходени полета.

Задача 5. *(5 точки)* Дадени са шест монети, една от които е фалшива (ралична по тегло от останалите). Как може да се намери фалшивата монета с три претегляния, ако всяко претегляне отчита общото тегло на теглените монети?

Решение: Да означим монетите с a, b, c, d, e, f. Първо претегляме $X = a+b$, след това – $Y = c + d$.
Ако $X = Y$, то претегляме e. Ако $e = \dfrac{X}{2}$, то f е фалшивата, иначе e е фалшивата.
Ако $X > Y$, то e и f са истински. Претегляме $Z = a + c + e$. Сега, ако $Z = \dfrac{3}{2}X$, то монетите в X и Z са истински, а d е фалшива. Ако $Z = \dfrac{3}{2}Y$, то монетите в Y и Z са истински, а b е фалшива. Ако Z не е равно нито на $\dfrac{3}{2}X$, нито на $\dfrac{3}{2}Y$, то фалшивата монета е в Z (a или c). Тогава или $Z = X + \dfrac{1}{2}Y$ (и фалшивата е a), или $Z = \dfrac{1}{2}X + Y$ (и фалшивата е c).
Ако $X < Y$, разсъждаваме аналогично.