

27. Международен турнир на градовете

Пролетен тур

Основен вариант за 10. – 12. клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. (4 точки) Даден е изпъкнал 100-ъгълник. Докажете, че могат да се изберат 50 вътрешни точки така, че всеки връх да лежи на права, определена от някои две измежду избраните точки.

Задача 2. (5 точки) Съществуват ли естествени числа n и k , за които десетичният запис на числото 2^n започва с числото 5^k , а десетичният запис на числото 5^n започва с числото 2^k ?

Задача 3. (5 точки) Даден е многочленът $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Докажете, че всяко естествено число n многочленът $P(x)^n$ има поне един отрицателен коефициент.

Задача 4. (6 точки) В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AA' и на отсечката AA' е избрана точка X . Правата BX пресича AC в точка B' , а правата CX пресича AB в точка C' . Отсечките $A'B'$ и CC' се пресичат в точка P , а отсечките $A'C'$ и BB' се пресичат в точка Q . Докажете, че $\angle PAC = \angle QAB$.

Задача 5. (6 точки) Едно естествено число се нарича "голямо", ако в десетичния му запис всички цифри са по-големи от 6. Докажете, че могат да се намерят безброй много двойки "големи" числа, за които произведението на числата във всяка двойка е също "голямо" число.

Задача 6. (7 точки) Дванадесет скакалеца са кацнали в 12 различни точки по окръжност. Тези точки разделят окръжността на 12 дъги. По даден сигнал скакалците едновременно скачат по посока на часовниковата стрелка от края на своята дъга в нейната среда. Образуват се нови 12 дъги и скачането продължава. Може ли поне един скакалец да се върне в първоначалната си позиция след:

- а) (4 точки) 12 скока;
- б) (3 точки) 13 скока?

Задача 7. (8 точки) Мравка пълзи по ребрата на додекаедър без да се обръща. Маршрутът е затворен и обхожда точно два пъти всяко ребро. Докажете, че поне едно ребро мравката е пропъзляла два пъти в една и съща посока. (Додекаедърът има 20 върха, 30 ребра и 12 еднакви петъгълни стени, като във всеки връх се събират 3 стени.)