

27. Международен турнир на градовете

Пролетен тур

Основен вариант за 7. – 9. клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. (4 точки) Билярдна маса има форма на правоъгълник 2×1 . В ъглите и в средите на големите страни на масата са разположени джобове. На масата са поставени топки така, че всеки джоб да лежи на една права с поне две топки. Колко най-малко топки са поставени? (Джобовете и топките се разглеждат като точки.)

Задача 2. (4 точки) Едно естествено число се нарича "голямо", ако в десетичния му запис всички цифри са по-големи от 5. Докажете, че могат да се намерят 100 двойки "големи" числа, за които произведението на числата във всяка двойка е също "голямо" число.

Задача 3. (5 точки) Даден е остроъгълен триъгълник ABC . На страните AB и BC външно са построени еднакви правоъгълници $ABMN$ и $LBCK$ така, че $AB = LB$. Докажете, че правите AL , CM и NK се пресичат в една точка.

Задача 4. (5 точки) Съществува ли естествено число n , при което десетичният запис на числото 2^n започва с цифрата 5, а десетичният запис на числото 5^n започва с цифрата 2?

Задача 5. (6 точки) Във всяко поле на таблица с 2005 реда и 2006 стълба е записано едно от числата 0, 1 и 2. Известно е, че сборът от числата във всеки ред и във всеки стълб се дели на 3. Колко най-много единици може да има в таблицата?

Задача 6. (7 точки) Криволинеен многоъгълник се нарича многоъгълник, чиито страни са заменени с дъги от окръжност. Съществуват ли криволинеен многоъгълник P и точка A от контура на P , за които всяка права през A разделя контура на P на две части с равна дължина? (Всяка от двете части е свързана.)

Задача 7. (8 точки) Петър има таблица 5×5 , попълнена с 25 различни числа. Петър избира най-голямото число в таблицата и зачертава реда и стълба, в които се намира това число. След това избира най-голямото от останалите числа, зачертава реда и стълба в които то се намира и т.н. Иван има същата таблица и постъпва по подобен начин, но всеки път избира най-малкото число. Възможно ли е сборът на числата, избрани от Иван, да е:

- (6 точки) по-голям от сбора на числата, избрани от Петър;
- (2 точки) по-голям от сбора на кои да е пет числа от дадената таблица, всеки две от които са в различен ред и в различен стълб?