27. Международен турнир на градовете

Пролетен тур

Тренировъчен вариант за 10. – 12. клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. *(3 точки)* Даден е изпъкнал многостен със 100 ребра. Всички върхове са изрязани с равнини така, че никои две от равнините на рязане не се пресичат вътре или по границата на многостена. Колко върха и колко ребра има полученият многостен?

Задача 2. *(3 точки)* Съществуват ли такива функции $p(x)$ и $q(x)$, че $p(x)$ да е четна функция, а $p(q(x))$ да е нечетна функция (различна от тъждествено равната на 0)?

Задача 3. *(4 точки)* Дадено е положително число a, за което неравенството $10 < a^x < 100$ има точно 5 решения в естествени числа. Колко естествени решения може да има неравенството $100 < a^x < 1000$?

Задача 4. *(5 точки)* Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$. На страната BC е избрана точка M, а на страната CD - точка N така, че $\angle MAN = \dfrac{1}{2}\angle BAD$. Докажете, че $MN = BM + ND$.

Задача 5. *(6 точки)* Петър има n^3 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб $n \times n \times n$ с изцяло бяла повърхност. Колко най-малко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър? Решете задачата за:
а) (3 точки) $n = 3$;
б) (3 точки) $n = 1000$.