27. Международен турнир на градовете
Пролетен тур
Тренировъчен вариант за 7. – 9. клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. *(3 точки)* Даден е $\triangle ABC$ с $\angle A = 60^\circ$. Симетралата на AB пресича правата AC в точка N, а симетралата на AC пресича правата AB в точка M. Докажете, че $CB = MN$.

Задача 2. *(3 точки)* Дадена е таблица $n \times n$. Във всяко поле от първия стълб е записано числото 1, във всяко поле от втория стълб - числото 2 и т.н., във всяко поле от n-тия стълб е записано числото n. След това са изтрити числата по диагонала, свързващ горното ляво и долното дясно поле. Докажете, че сборът на числата над изтрития диагонал е два пъти по-голям от сбора на числата под диагонала.

Задача 3. *(4 точки)* Дадено е положително число a, за което неравенството $1 < xa < 2$ има точно три цели решения. Колко цели решения може да има неравенството $2 < xa < 3$?

Задача 4. *(6 точки)* Ани, Боби и Вики седят на кръгла маса и ядат орехи. В началото всички орехи са у Ани. Тя ги разпределя поравно на Боби и Вики, а остатъка (ако има такъв) изяжда. По същия начин постъпва всяко следващо (по посока на часовниковата стрелка) момиче: разпределя своите орехи поравно на своите съседки, а остатъка (ако има такъв) изяжда. Орехите са много (повече от 3). Докажете, че:
а) (3 точки) поне един орех ще бъде изяден;
б) (3 точки) всички орехи ще бъдат изядени.

Задача 5. *(6 точки)* Петър има n^3 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб $n \times n \times n$ с изцяло бяла повърхност. Колко най-малко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър? Решете задачата за:
а) (2 точки) $n = 2$;
б) (4 точки) $n = 3$.