Основен вариант за 10. – 12. клас

Задача 1. *(4 точки)* Даден е изпъкнал 100-ъгълник. Докажете, че могат да се изберат 50 вътрешни точки така, че всеки връх да лежи на права, определена от някои две измежду избраните точки.

Решение. Номерираме върховете на многоъгълника по посока на часовниковата стрелка: $1, 2, \ldots, 100$. Разглеждаме десетоъгълник с върхове $1, 2, 21, 22, 41, 42, 61, 62, 81, 82$. Неговите върхове лежат на петте прави $(1, 22), (21, 42), (41, 62), (61, 82), (81, 2)$. Тези прави са определени и от петте пресечни точки на първата и втората, втората и третата, третата и четвъртата, четвъртата и петата, петата и първата от изброените прави (очевидно тези точки са различни). Аналогично постъпваме с многоъгълниците с върхове

$$1 + 2k, 2 + 2k, 21 + 2k, 22 + 2k, 41 + 2k, 42 + 2k, 61 + 2k, 62 + 2k, 81 + 2k, 82 + 2k$$

при $k = 1, 2, \ldots, 9$. Задачата позволява много други решения.

Задача 2. *(5 точки)* Съществуват ли естествени числа n и k, за които десетичният запис на числото 2^n започва с числото 5^k, а десетчиният запис на числото 5^n започва с числото 2^k?

Решение. Ще докажем, че такива числа не съществуват. Ако допуснем, че за някое естествено n числото 2^n започва с 5^k, а числото 5^n започва с 2^k, то

$$5^k.10^s < 2^n < (5^k + 1).10^s \quad \text{и} \quad 2^k.10^l < 5^n < (2^k + 1).10^l.$$

Оттук

$$10^{k+l+s} < 10^n < (2^k + 1)(5^k + 1).10^{l+s} < 5.2^k.2.5^k.10^{l+s} = 10^{k+l+s+1},$$

т.е. $k + l + s < n < k + l + s + 1$, което е невъзможно.

Задача 3. *(5 точки)* Даден е многочленът $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Докажете, че всяко естествено число n многочленът $P(x)^n$ има поне един отрицателен коефициент.

Решение. Сборът от коефициентите на многочлен $t(x)$ е равен на $t(1)$, с свободният член е равен на $t(0)$. Следователно сборът от коефициентите на $P(x)^n$ е $P(1)^n = 2^n$. Но в $P(x)^n$ свободният член е равен на $P(0)^n = 2^n$, а коефициентът пред x^{4n} е 1 и сборът на тези два коефициента вече е $2^n + 1$, т.е. надхвърля сбора на всички коефициенти. Следователно $P(x)^n$ има и отрицателни коефициенти.

Задача 4. *(6 точки)* В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AA' и на отсечката AA' е избрана точка X. Правата BX пресича AC в точка B', а правата CX пресича AB в точка C'. Отсечките $A'B'$ и CC' се пресичат в точка P, а отсечките $A'C'$ и BB' се пресичат в точка Q. Докажете, че $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$.

Решение. С $h_M(l)$ ще означаваме разстоянието от точката M до правата l. Ще използваме следната *Лема.* Ако са дадени три лъча OL, OM и ON, то за всички точки K от лъча OM отношението $h_K(OL) : h_K(ON)$ е едно и също.

Достатъчно е да се докаже, че $h_P(AC) : h_P(AA') = h_Q(AB) : h_Q(AA')$ (тъй като $\sphericalangle A'AC = \sphericalangle A'BC$, равенството на тези отношения означава, че правите AP и AC сключват същия ъгъл, както правите AQ и AB). От лемата следват равенствата

$$h_P(BC) : h_P(AC) = h_X(BC) : h_X(AC) \quad \text{и} \quad h_Q(BC) : h_Q(AB) = h_X(BC) : h_X(AB).$$

Тъй като X лежи на ъглополовящата AA', то $h_X(AC) = h_X(AB)$ и получаваме

$$h_P(BC) : h_P(AC) = h_Q(BC) : h_Q(AB).$$

Тогава е достатъчно да се докаже, че $h_P(BC) : h_P(AA') = h_Q(BC) : h_Q(AA')$, което според лемата е еквивалентно на

$$h_{B'}(BC) : h_{B'}(AA') = h_{C'}(BC) : h_{C'}(AA').$$

Нека $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Тъй като $h_{B'}(AB) : h_{B'}(AA') = \sin 2\alpha : \sin\alpha = h_{C'}(AC) : h_{C'}(AA')$, достатъчно е да се докаже, че $h_{B'}(BC) : h_{B'}(AB) = h_{C'}(BC) : h_{C'}(AC)$. Последното е еквивалентно на очевидното равенство $h_X(BC) : h_X(AB) = h_X(BC) : h_X(AC)$.

Задача 5. *(6 точки)* Едно естествено число се нарича "голямо", ако в десетичния му запис всички цифри са по-големи от 6. Докажете, че могат да се намерят безрбой много двойки "големи" числа, за които произведението на числата във всяка двойка е също "голямо" число.

Решение. Решение на задачата са, например, двойките големи числа от вида $(8\underbrace{7\ldots7}_{k-1}, 8\underbrace{9\ldots9}_{k-3}87)$, $k \geq 4$. Произведението на числата във всяка двойка е равно на $78\underbrace{9\ldots9}_{k-4}87\underbrace{8\ldots8}_{k-2}99$.

Задача 6. *(7 точки)* Дванадесет скакалеца са кацнали в 12 различни точки по окръжност. Тези точки разделят окръжността на 12 дъги. По даден сигнал скакалците едновременно скачат по посока на часовниковата стрелка от края на своята дъга в нейната среда. Образуват се нови 12 дъги и скачането продължава. Може ли поне един скакалец да се върне в първоначалната си позиция след:
а) (4 точки) 12 скока; б) (3 точки) 13 скока?

Решение. Ще докажем, че отговорът и на двата въпроса е отрицателен.
а) Ще наричаме ход едновременните 12 скока на скакалците. Да допуснем, че даден скакалец (наричан първи) се е върнал в изходната си позиция A след 12 хода. Тъй като ходовете не променят реда, в който скакалците са подредени по окръжността, ясно е, че за първите 11 хода останалите 11 скакалци са прескочили поне по веднъж точката A. Но за един ход най-много един скакалец прескача A, а на първия ход нито един скаклец не прескача A. Противоречие.
б) Да допуснем, че след 13 скока един скакалец (наричан първи) се е върнал в изходната си позиция. Разгръщаме окръжността в отсечка, разрязвайки я в първоначалната позиция A на първия скакалец. Върху отсечката има 12 скакалеца и приемаме, че първият скакалец е в левия ѝ край A. Започвайки от началото O на лъч Ox, нанасяме тази отсечка заедно с 12-те скакалеца на нея, а към десния ѝ край долепваме същата отсечка със скакалци в съответните точки и т.н. Левите краища на последователно нанесените отсечки означаваме с точките $O = A_1, A_2, \ldots$. В новия модел всички скакалци (те са безброй много!) скачат от мястото си към средата на отсечката до следващия скакалец. (Предполагаме, че обхождането на окръжността по посока на часовниковата стрелка съвпада с положителната посока на лъча.)
Тогава първият скакалец след 13 скока или попада в точката A_{14}, или излиза извън отсечката A_1A_{14}.
По индукция ще докажем, че след n скока i-тият скакалец се намира в центъра на тежестта на системата точки $((A_i, C(0,n)), (A_{i+1}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n)))$ (първата позиция във всяка двойка е точката, а втората – разположеното там тегло $(C(k,n) = \frac{n!}{k!(n-k)!})$.
Ако точките A_i и A_{i+1} имат тегло 1, то след първия скок първият скакалец ще попадне в средата на отсечката A_iA_{i+1}, т.е. в центъра на тежестта на системата $((A_i, 1), (A_{i+1}, 1))$. Така базата на индукцията е проверена.
Да допуснем, че след n скока i-тият скакалец се намира в центъра на тежестта X на системата $((A_i, C(0,n)), (A_{i+1}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n)))$, а $i+1$-ия – в центъра на тежестта Y на системата $((A_{i+1}, C(0,n)), (A_{i+2}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n+1}, C(n,n)))$. Тогава средата на свързващата ги отсечка има същите координати, както центъра на тежестта на системата $((X,1),(Y,1))$, който съвпада с центъра на тежестта на системата

$$((A_i, C(0,n)), (A_{i+1}, C(1,n) + C(0,n)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n) + C(n-1,n)), (A_{i+n+1}, C(n,n))),$$

т.е. на системата

$$((A_i, C(0,n+1)), (A_{i+1}, C(1,n+1)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n+1)), (A_{i+n+1}, C(n+1,n+1))).$$

Така е доказана и стъпката на индукцията.
Тогава след 13 скока скакалецът ще се намира в центъра на тежестта на системата $((A_1, C(0,13)), (A_2, C(1,13)), \ldots, (A_{14}, C(13,13)))$ – точката O. Ако Z е център на тежестта на $((A_2, C(1,13)), \ldots, (A_{13}, C(12,13)))$, а T е център на тежестта на $((A_1, C(0,13)), (A_{14}, C(13,13)))$, то O е център на тежестта на системата от двете точки Z и T (с определени тегла в тях). Ясно е, че Z е вътрешна точка за отсечката A_1A_{13}. Освен това, $C(0,13) = C(13,13)$ и $A_1A_2 = A_{13}A_{14}$, следователно и T е вътрешна точка за отсечката A_1A_{13}. Тогава и O е вътрешна точка за отсечката A_1A_{13}.

Задача 7. *(8 точки)* Мравка пълзи по ребрата на додекаедър без да се обръща. Маршрутът е затворен и обхожда точно два пъти всяко ребро. Докажете, че поне едно ребро мравката е пропълзяла два пъти в една и съща посока. (Додекаедърът има 20 върха, 30 ребра и 12 еднакви петоъгълни стени, като във всеки връх се събират 3 стени.)

Решение. Да допуснем, че съществува маршрут, който обхожда всяко ребро по веднъж във всяко направление. Да разгледаме върха A със съседни върхове B, C и D; нека първо мравката допълзява до A от B. След това тя продължава към C или D. Ако продължи към C, то в някой следващ момент трябва да мине от C към A и после да отиде в D (иначе ще трябва да пълзи по маршрута $D-A-D$). След това в някакъв момент мравката пропълзява от D в A и след това към B. Така получаваме два начина за минаване през A:

$$(B-A-C, C-A-D, D-A-B) \quad \text{или} \quad (B-A-D, D-A-C, C-A-B).$$

Забелязваме, че преминаването през A става или винаги с "ляв", или винаги с "десен" завой; в зависимост от това ще наричаме точката A *лява* или *дясна*. Ясно е, че маршрут, тръгващ от даден връх по дадено ребро, се определя еднозначно от вида на точките (леви или десни). На всяко разделяне на върховете на леви и десни съответства множество от непресичащи се (т.е. нямамщи общо ребро, обходено в една и съща посока) затворени маршрути.

Според допускането, първоначално има един цикъл, минаващ по всяко ребро по два пъти. Нека последователно преориентираме десните върхове от маршрута в леви. След първото преориентиране началният цикъл може да се разпадне на няколко еднозначно определени цикъла.

Ще докажем, че при преориентация на даден връх A от додекаедър четността на броя на циклите не се променя. В случая $(B-A-C, C-A-D, D-A-B)$ за конфигурацията на маршрутите през A съществуват три възможности.

1. Ако преди преориентацията сме имали три различни цикъла

$$(B-A-C-\ldots-B), (C-A-D-\ldots-C), (D-A-B-\ldots D),$$

след преориентацията ще получим един цикъл:

$$(C-A-B-\ldots-D-A-C-\ldots-B-A-D-\ldots-C).$$

2. Ако преди преориентацията сме имали два различни цикъла

$$(B-A-C-\ldots-B), (C-A-D-\ldots-D-A-B-\ldots C),$$

след преориентацията ще получим отново два цикъла:

$$(C-A-B-\ldots-C), (B-A-D-\ldots-D-A-C-\ldots-B).$$

3. Ако преди преориентацията сме имали един цикъл

$$(B-A-C-\ldots-C-A-D-\ldots-D-A-B-\ldots B),$$

след преориентацията ще получим отново един:

$$(B-A-D-\ldots-D-A-C-\ldots-C-A-B-\ldots-B).$$

Следователно след всяка преориентация четността на броя на циклите се запазва, т.е. този брой е нечетен.

От друга страна, ако във всеки връх мравката завива наляво, единственият начин за обхождане на додекаедъра е да се мине по контура на всяка стена. Тогава всеки цикъл е с дължина 5 и маршрутите са 12; противоречие.