27. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур
Тренировъчен вариант за 10. – 12. клас

Задача 1. *(3 точки)* Даден е изпъкнал многостен със 100 ребра. Всички върхове са изрязани с равнини така, че никои две от равнините на рязане не се пресичат вътре или по границата на многостена. Колко върха и колко ребра има полученият многостен?

Решение. На всяко ребро на дадения многостен лежат по два върха на получения, като от всеки връх на получения многостен излизат по 3 ребра. Следователно полученият многостен има $2.100 = 200$ върха и $\frac{200.3}{2} = 300$ ребра.

Задача 2. *(3 точки)* Съществуват ли такива функции $p(x)$ и $q(x)$, че $p(x)$ да е четна функция, а $p(q(x))$ да е нечетна функция (различна от тъждествено равната на 0)?

Решение. Да, съществуват: например четната функция $p(x) = \cos x$ и функцията $q(x) = \frac{\pi}{2} - x$; тогава $p(q(x)) = \sin x$ е нечетна функция.

Задача 3. *(4 точки)* Дадено е положително число a, за което неравенството $10 < a^x < 100$ има точно 5 решения в естествени числа. Колко естествени решения може да има неравенството $100 < a^x < 1000$?

Решение. Нека $a = 10^b$. Нервенството $10 < a^x < 100$ се записва във вида $10 < 10^{bx} < 100$, т.е. $1 < bx < 2$. Аналогично, $100 < a^x < 1000$ е еквивалентно на $2 < bx < 3$. Ако n е най-малкото естествено решение на $1 < bx < 2$, то

$$b(n-1) < 1 < bn \quad \text{и} \quad b(n+4) < 2 < b(n+5).$$

Като удвоим първото и съберем първото и второто неравенства, получаваме

$$b(2n-2) < 2 < b(2n); \quad \text{и} \quad b(2n+3) < 3 < b(2n+5).$$

От последните две неравенства следва, че неравенството $2 < bx < 3$ може да има 4, 5 или 6 естествени решения.

И трите варианта са възможни: при $b = \frac{5}{23}$ решения на първото неравенство са 5, 6, 7, 8 и 9, а на второто: 10, 11, 12 и 13; при $b = \frac{5}{26}$ решения на първото неравенство са 6, 7, 8, 9 и 10, а на второто: 11, 12, 13, 14 и 15; при $b = \frac{5}{27}$ решения на първото неравенство са 6, 7, 8, 9 и 10, а на второто: 11, 12, 13, 14, 15 и 16.

Задача 4. *(5 точки)* Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$. На страната BC е избрана точка M, а на страната CD - точка N така, че $\sphericalangle MAN = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD$. Докажете, че $MN = BM + ND$.

Решение. Нека R е симетричната точка на B относно AM. От равенствата $AD = AB$ и $\sphericalangle MAN = \sphericalangle NAD + \sphericalangle MAB$ следва, че R е симетричната на D точка относно AN. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан, следователно $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$, откъдето $\sphericalangle ARM + \sphericalangle ARN = 180°$, т.е. точките M, R и N лежат на една права. Тогава $BM + ND = MR + NR = MN$.

Задача 5. *(6 точки)* Петър има n^3 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб $n \times n \times n$ с изцяло бяла повърхност. Колко най-малко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър? Решете задачата за:
а) (3 точки) $n = 3$; б) (3 точки) $n = 1000$.

Решение. а) Достатъчно е Емил да оцвети стените на две кубчета, тъй като при сглобяване на куб $3 \times 3 \times 3$ напълно може да се скрие само едно кубче.
Ще покажем, че ако са оцветени най-много 11 стени, Петър може да сглоби куб $3\times3\times3$ с неоцветени стени. Емил оцветява поне по две стени от кубче, защото една оцветена стена може да се скрие при всяко разположение на кубчето. Следователно най-много 5 кубчета имат оцветени стени. Кубчето с най-много оцветени стени Петър ще разположи в центъра на големия куб, а останалите кубчета,

които имат оцветени стени – в центровете на стените на големия куб, като външните им стени са неоцветени. (Всяко от тях има поне една неоцветена стена, тъй като напълно оцветено може да е само едно кубче и ако има такова, то е в центъра на куба.)
Следователно Емил трябва да оцвети поне 12 стени.
б) Достатъчно е Емил да оцвети по две противоположни стени на $1000^3 - 7$ кубчета, т.е. общо 199999986 стени. Тогава едно от осемте ъглови кубчета на големия куб ще бъде с две противоположни оцветени стени и задължително една от тях ще бъде външна.
Ако са оцветени по-малко от $2.1000^3 - 14$ стени, кубчетата с не повече от една оцветена стена са поне 8. Петър ги разполага в ъглите на големия куб (като скрива, ако е необходимо, по една оцветена стена на кубче). Кубчетата с не по-малко от 3 оцветени стени, са не повече от $\dfrac{2.1000^3}{3} < 998^3$. Следователно Петър може да ги скрие във вътрешността на големия куб. Останалите кубчета трябва да се разположат по ръбовете и вътре в стените на големия куб. Петър слага всяко от тях така, че оцветените стени (най-много две), да не са външни.
Следователно Емил трябва да оцвети поне $2.1000^3 - 14$ стени.