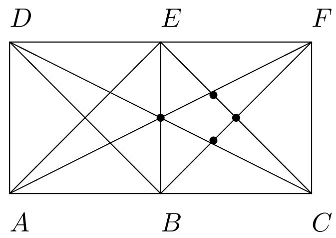
Основен вариант за 7. – 9. клас

Задача 1. *(4 точки)* Билярдна маса има форма на правоъгълник 2×1. В ъглите и в средите на големите страни на масата са разположени джобове. На масата са поставени топки така, че всеки джоб да лежи на една права с поне две топки. Колко най-малко топки са поставени? (Джобовете и топките се разглеждат като точки.)

Решение. Ще докажем, че са поставени най-малко 4 топки. При означенията на чертежа, може да се поставят топки в пресечните точки на $AD \cap CF$, $AD \cap CE$, $BD \cap CF$ и $BD \cap CE$.



Ще докажем, че три топки са недостатъчни. Права през две топки пресича границата на правоъгълника в две точки. Джобовете са 6, значи са необходими поне 3 прави. Три топки определят 3 прави, само ако тези прави образуват при пресичането си триъгълник. Но никои три от правите, свързващи по два джоба ($AE, AD, BF, BE, BD, CF, CE$), не образуват триъгълник с върхове във вътрешността на правоъгълника.

Задача 2. *(4 точки)* Едно естествено число се нарича "голямо", ако в десетичния му запис всички цифри са по-големи от 5. Докажете, че могат да се намерят 100 двойки "големи" числа, за които произведението на числата във всяка двойка е също "голямо" число.

Решение. Всички двойки от вида $(7, \underbrace{9\ldots9}_{n}7)$, $n \geq 1$ изпълняват условието, тъй като

$$7.\underbrace{9\ldots9}_{n}7 = 6\underbrace{9\ldots9}_{n-1}79.$$

Задача 3. *(5 точки)* Даден е остроъгълен триъгълник ABC. На страните AB и BC външно са построени еднакви правоъгълници $ABMN$ и $LBCK$ така, че $AB = LB$. Докажете, че правите AL, CM и NK се пресичат в една точка.

Решение. Нека O е втората пресечна точка на описаните около дадените правоъгълници окръжности. Тогава $\sphericalangle BON = \sphericalangle BOK = 90^\circ$, следователно точките N, O и K лежат на една права, перпендикулярна на BO. Равенството на ъглите $\sphericalangle NBA$ и $\sphericalangle LBK$ следва от еднаквостта на съответните триъгълници. Тогава $\sphericalangle NOA = \sphericalangle NBA = \sphericalangle LBK = \sphericalangle LOK$, откъдето следва, че точките A, O и L лежат на една права. Аналогично, точките M, C и O също лежат на една права, т.е. O е пресечната точка на разглежданите три прави.

Задача 4. *(5 точки)* Съществува ли естествено число n, при което десетичният запис на числото 2^n започва с цифрата 5, а десетичният запис на числото 5^n започва с цифрата 2?

Решение. Ще докажем, че такова число не съществува. Да допуснем, че съществува естествено число n, за което 2^n започва с цифрата 5 и 5^n започва с цифрата 2. Тогава

$$5.10^s < 2^n < 6.10^s \text{ и } 2.10^t < 5^n < 3.10^t$$

за някои естествени числа s и t. Като умножим, получаваме

$$10^{s+t+1} < 10^n < 18.10^{s+t} < 10^{s+t+2},$$

т.е. $s + t + 1 < n < s + t + 2$, което е невъзможно.

Задача 5. *(6 точки)* Във всяко поле на таблица с 2005 реда и 2006 стълба е записано едно от числата 0, 1 и 2. Известно е, че сборът от числата във всеки ред и във всеки стълб се дели на 3. Колко най-много единици може да има в таблицата?

Решение. Нека в таблицата има n нули и d двойки. За да се дели на 3 сборът от числата във всеки ред, там трябва да има или поне една двойка, или две нули. Следователно

$$d + \frac{n}{2} \geq 2005.$$

Аналогично, във всеки стълб има или поне две двойки, или една нула, откъдето

$$n + \frac{d}{2} \geq 2006.$$

Като съберем горните неравенства, получаваме

$$d + n \geq 2674.$$

Следователно единиците са най-много $2005.2006 - 2674 = 4022030$.
Пример на получената оценка построяваме по следния начин: записваме в талицата 1338 нули по две в ред, започвайки от горния ляв ъгъл (в 669 реда и 1338 стълба) и 1336 двойки по две в стълб, започвайки от долния десен ъгъл (в 1336 реда и 668 стълба), а останалите полета запълваме с единици. Тъй като $669 + 1336 = 2005$ и $1338 + 668 = 2006$, то нули и двойки има във всеки ред и стълб и всеки сбор се дели на 3.

0	0	1	1	...	1	1	1	...	...	1
1	1	0	0	...	1	1	1	...	...	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	...	0	0	1	...	...	1
1	...	...	...	...	...	1	2	1	...	1
1	...	...	...	...	...	1	2	1	...	1
1	...	...	...	...	...	1	1	2	...	1
1	...	...	...	...	...	1	1	2	...	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	...	...	...	...	...	1	1	1	...	2
1	...	...	...	...	...	1	1	1	...	2

Задача 6. *(7 точки)* Криволинеен многоъгълник се нарича многоъгълник, чиито страни са заменени с дъги от окръжност. Съществуват ли криволинеен многоъгълник P и точка A от контура на P, за които всяка права през A разделя контура на P на две части с равна дължина? (Всяка от двете части е свързана.)

Решение. Такъв многоъгълник съществува. Например, да разгледаме отсечка $XY = 4r$ със среда A и изродения триъгълник AXY. Съответният му криволинеен триъгълник се получава от полуокръжност с диаметър XY и полуокръжности с диаметри AX и AY в другата полуравнина относно XY. Периметърът на фигурата е равен на $4\pi r$. Лесно се вижда, че XY разполовява периметъра на фигурата. Нека права през A сключва ъгъл α радиана с AY. При пресичането си с контура на криволинейния многоъгълник, тази права изрязва от голямата полуокръжност дъга с дължина a, а прибавя дъга с дължина b. Тъй като вписаният ъгъл, отговарящ на дъгата b от малката полуокръжност (с радиус r), е равен на α, то $b = 2\alpha r$. Голямата полуокръжност има радиус $2r$ и на дъгата a отговаря централен ъгъл α, следователно $a = 2\alpha r$. Тъй като $a = b$, то всяка права през A разполовява периметъра на криволинейния триъгълник.

Задача 7. *(8 точки)* Петър има таблица 5×5, попълнена с 25 различни числа. Петър избира най-голямото число в таблицата и зачертава реда и стълба, в които се намира това число. След това избира най-голямото от останалите числа, зачертава реда и стълба в които то се намира и т.н. Иван има същата таблица и постъпва по подобен начин, но всеки път избира най-малкото число. Възможно ли е сборът на числата, избрани от Иван, да е:
а) (6 точки) по-голям от сбора на числата, избрани от Петър;
б) (2 точки) по-голям от сбора на кои да е други пет числа от дадената таблица, всеки две от които са в различен ред и в различен стълб?

Решение. а) Не може. Да означим числата в реда на тяхното избиране: Петър избира b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, а Иван – m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Ще докажем, че ако $i + j < 5$, то $b_i \geq m_j$. Индексът е равен на броя

редове и броя стълбове, зачертани преди избора на съответното число. Например, при избора на b_1 са били зачертани един ред и един стълб, а при избора на m_3 – три реда и три стълба. Общо са били зачертани най-много 4 реда и 4 стълба, следователно поне едно число a е незачертано и в двата случая. Петър избира най-голямото от незачертаните числа, затова $b_1 \geq a$; Иван избира най-малкото от останалите, затова $m_3 \leq a$. Следователно $b_1 \geq m_3$. Аналогично, $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$, $b_4 \geq m_0$, т.е. сборът на Петър е не по-малък от сбора на Иван.
б) Да, може. В таблицата

10000	1001	1002	1003	1004
1005	1000	101	102	103
1006	104	100	11	12
1007	105	13	10	2
1008	106	14	3	1

Иван избира числата 1, 10, 100, 1000, 10000 със сбор 11111. Ще покажем, че не може да се получи по-голям сбор на кои да е пет числа от дадената таблица, всеки две от които са в различен ред и в различен стълб. Наистина, ако не се избере числото 10000, сборът ще бъде по-малък от $1008.5 = 5040$; значи трябва да се избере 10000. По-нататък, ако не се избере 1000, сборът ще бъде по-малък от $10000 + 106.4 = 10424$; значи трябва да се избере и 1000. След това, ако не се избере 100, сборът ще бъде по-малък от $10000 + 1000 + 3.14 = 11042$, значи и 100 трябва да се избере. Аналогично трябва да се изберат 10 и 1; т.е. всички числа на Иван.