27. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур
Тренировъчен вариант за 7. – 9. клас

Задача 1. *(3 точки)* Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle A = 60^\circ$. Симетралата на AB пресича правата AC в точка N, а симетралата на AC пресича правата AB в точка M. Докажете, че $CB = MN$.

Решение. Точка N е върху симетралата на AB, следователно $NA = NB$. В равнобедрения $\triangle ANB$ ъгълът при върха A е равен на 60°, следователно $\triangle ANB$ е равностранен. Оттук $AN = AB$. Аналогично, $\triangle AMC$ е равностранен и $AM = AC$. Остава да забележим, че $\triangle ACB \cong \triangle AMN$ и оттук $BC = MN$.

Задача 2. *(3 точки)* Дадена е таблица $n \times n$. Във всяко поле от първия стълб е записано числото 1, във всяко поле от втория стълб - числото 2 и т.н., във всяко поле от n-тия стълб е записано числото n. След това са изтрити числата по диагонала, свързващ горното ляво и долното дясно поле. Докажете, че сборът на числата над изтрития диагонал е два пъти по-голям от сбора на числата под диагонала.

Решение. За всяко от разглежданите диагонални полета пресмятаме сбора от числата, записани *вляво* от него и сбора на числата, записани *над* него. Например, вляво от полето в k-тия ред и стълб са числата $1, 2, \ldots, (k-1)$ и сборът им е $\frac{1}{2}k(k-1)$, а над него са записани $k-1$ числа, всяко от които е равно на k и сборът им е $k(k-1)$, т.е. два пъти по-голям. Следователно сборът от всички числа над диагонала е два пъти по-голям от сбора на всички числа вляво от диагонала.

Задача 3. *(4 точки)* Дадено е положително число a, за което неравенството $1 < xa < 2$ има точно три цели решения. Колко цели решения може да има неравенството $2 < xa < 3$?

Решение. Първото неравенство е еквивалентно на $\frac{1}{a} < x < \frac{2}{a}$. Интервалът $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$ съдържа три цели числа. Те го разбиват на два (вътрешни) интервала с дължина 1 и два (крайни) интервала с дължина не по-голяма от 1. Следователно за дължината $\frac{1}{a}$ на интервала $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$ е изпълнено неравенството $2 < \frac{1}{a} \leq 4$.

Въобще, ако интервал с дължина t съдържа k цели числа, то е в сила неравенството $k-1 < t \leq k+1$, откъдето $t - 1 \leq k < t + 1$.

Вторият интервал $\left(\frac{2}{a}, \frac{3}{a}\right)$ има дължина $t = \frac{1}{a}$ и като вземем предвид неравенствата за $\frac{1}{a}$, получаваме

$$1 < \frac{1}{a} - 1 \leq k < \frac{1}{a} + 1 \leq 5,$$

т.е. $k = 2, 3$ или 4. И трите случая са възможни: $k = 2$ при $a = \frac{3}{8}$ ($x = 6$ и 7); $k = 3$ при $a = \frac{1}{4}$ ($x = 9, 10$ и 11); $k = 4$ при $a = \frac{5}{17}$ ($x = 7, 8, 9$ и 10).

Задача 4. *(6 точки)* Ани, Боби и Вики седят на кръгла маса и ядат орехи. В началото всички орехи са у Ани. Тя ги разпределя поравно на Боби и Вики, а остатъка (ако има такъв) изяжда. По същия начин постъпва всяко следващо (по посока на часовниковата стрелка) момиче: разпределя своите орехи поравно на своите съседки, а остатъка (ако има такъв) изяжда. Орехите са много (повече от 3). Докажете, че:

а) поне един орех ще бъде изяден; б) не всички орехи ще бъдат изядени.

Решение. Първо ще отбележим, че във всеки момент (освен началния) момичето, което е разпределяло последно, няма орехи. Освен това, момичето X, което е наред да разпределя, има не по-малко орехи от следващото поред момиче Y. Това е така, тъй като X и Y са получили по равен брой орехи от последното раздаване, а след предпоследното раздаване разпределя Y и остава без орехи.

а) Нека момичето, което разпределя орехите, има a ореха, а следващото има b ореха. Да допуснем, че нито един орех не е изяден. Следващото момиче, което разпределя орехите, ще има $a' = b + \frac{a}{2}$ ореха, а следващото след него има $b' = \frac{a}{2}$ ореха. Забелязваме, че $|a' - 2b'| = \frac{|a-2b|}{2}$, т.е. този

израз при всяко разпределяне намалява 2 пъти и остава цял. Това е невъзможно, следователно поне един орех ще бъде изяден.
б) Ако орехите винаги са повече от 3, твърдението е вярно. В обратен случай разглеждаме момента, когато за първи път остават точно 3 ореха (такъв момент настъпва, тъй като броят на орехите намалява най-много с 1). Както забелязахме в началото, момичето, което е наред да разпределя, има не по-малко орехи от това след него, т.е. разпределящото момиче има два ореха, а следващото има един орех. Тази ситуация се запазва след раздаването, т.е. общият брой на орехите остава непроменен.

Задача 5. *(6 точки)* Петър има n^3 единични бели кубчета, от които иска да сглоби куб $n \times n \times n$ с изцяло бяла повърхност. Колко най-малко стени на единични кубчета трябва да оцвети Емил, за да попречи на Петър? Решете задачата за:
а) (2 точки) $n = 2$; б) (4 точки) $n = 3$.

Решение. а) Очевидно не е достатъчно Емил да оцвети една стена. Достатъчно е обаче да се оцветят две противоположни стени на едно кубче: при сглобяването на куб $2 \times 2 \times 2$ една от тях винаги ще е външна.
б) Достатъчно е Емил да оцвети стените на две кубчета, тъй като при сглобяване на куб $3 \times 3 \times 3$ напълно може да се скрие само едно кубче.
Ще покажем, че ако са оцветени най-много 11 стени, Петър може да сглоби куб $3 \times 3 \times 3$ с неоцветени стени. Емил оцветява поне по две стени от кубче, защото една оцветена стена може да се скрие при всяко разположение на кубчето. Следователно най-много 5 кубчета имат оцветени стени. Кубчето с най-много оцветени стени Петър ще разположи в центъра на големия куб, а останалите кубчета, които имат оцветени стени – в центровете на стените на големия куб, като външните им стени са неоцветени. (Всяко от тях има поне една неоцветена стена, тъй като напълно оцветено може да е само едно кубче и ако има такова, то е в центъра на куба.)
Следователно Емил трябва да оцвети поне 12 стени.