28. Международен математически Турнир на градовете

Есенен тур, 2006 г.

Основен вариант, 10-12 клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. Постъпвайки на нова работа, Ани винаги се интересува кои от нейните колеги се познават. За да запомни по-лесно тази информация, тя рисува окръжност и представя всеки колега като хорда. При това, ако две хорди се пресичат, то съответните хора се познават, а ако не се пресичат, то съответните колеги не се познават. Ани е сигурна, че това винаги е възможно. Права ли е тя? (Ако две хорди имат общ връх, считаме, че те се пресичат.) [4 точки]

Задача 2. Върху страните BC, AC и AB на остроъгълен триъгълник ABC са избрани съответно точки A_1, B_1 и C_1 така, че AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи в $\triangle A_1B_1C_1$. Докажете, че AA_1, BB_1 и CC_1 са височини в $\triangle ABC$. [6 точки]

Задача 3. Числото $a = 0.12457\ldots$ е такова, че неговата n-та цифра след десетичната запетая е равна на последната цифра преди десетичната запетая на числото $n\sqrt{2}$. Докажете, че числото a е ирационално. [6 точки]

Задача 4. Може ли всяка призма да се разреже на непресичащи се пирамиди, така че основата на всяка пирамида да е в основата на призмата, а върхът на пирамидата да е върху другата основа на призмата? [4 точки]

Задача 5. Нека $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, където $\frac{a_n}{b_n}$ е несъкратима дроб. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $b_{n+1} < b_n$. [7 точки]

Задача 6. Казваме, че колода от 52 карти е в *правилен ред*, ако всеки две съседни карти са или от еднакъв цвят, или с еднаква стойност, като това е вярно и за първата и последната карти. Най-горната карта е асо пика. Докажете, че броят на начините, по които могат да се подредят картите в правилен ред:

а) се дели на 12; [3 точки]
б) се дели на 13. [5 точки]

Задача 7. Положителните числа $x_1, \ldots, x_k$ са такива, че

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2},$$

и

$$x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажете, че $k > 50$. [3 точки]
б) За някоя стойност на k дайте пример на такива числа. [3 точки]
в) Намерете минималното k, за което съществува такъв пример. [3 точки]