28. Международен математически Турнир на градовете

Есенен тур, 2006 г.

Тренировъчен вариант, 10-12 клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. На дъската са записани три цели положителни числа x, y и z. Мария си записва в тетрадка произведението на някои две от числата и намалява третото число на дъската с 1. С новите три числа тя извършва същата операция и т.н., докато едно от числата на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът на числата, записани в тетрадката на Мария? [4 точки]

Задача 2. В четириъгълник е вписана окръжност. Допирните точки на окръжността със страните на четириъгълника са свързани последователно с отсечки. Така са получени четири триъгълника, всеки от които има върхове в две допирни точки и един връх на четириъгълника. Докажете, че диагоналите на четириъгълника с върхове центровете на вписаните в четирите триъгълника окръжности, са перпендикулярни. [4 точки]

Задача 3. В полетата на таблица 2006×2006 по произволен начин са записани числата $1, 2, 3, \ldots, 2006^2$. Да се докаже, че съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4. [4 точки]

Задача 4. Дадена е безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots$ и безкрайна геометрична прогресия $b_1, b_2, \ldots$. Всички членове на геометричната прогресия са членове и на аритметичната прогресия. Докажете, че частното на геометричната прогресия е цяло число.
[4 точки]

Задача 5. Може ли правилният октаедър да бъде вписан в куб така, че всички върхове на октаедъра да са върху ръбовете на куба? (Правилният октаедър има 6 върха, от всеки връх излизат по 4 ребра и всички стени са равностранни триъгълници.) [5 точки]