28. Международен математически Турнир на градовете

Есенен тур, 2006 г.

Основен вариант, 7-9 клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. В правилен седмоъгълник е вписана окръжност и около него е описана окръжност. Същата операция е направена с правилен 17-ъгълник. Така двата многоъгълника са затворени в пръстени, които имат равни лица. Да се докаже, че двата многоъгълника също имат равни страни. [3 точки]

Задача 2. Постъпвайки на нова работа, Ани винаги се интересува кои от нейните колеги се познават. За да запомни по-лесно тази информация, тя рисува окръжност и представя всеки колега като хорда. При това, ако две хорди се пресичат, то съответните хора се познават, а ако не се пресичат, то съответните колеги не се познават. Ани е сигурна, че това винаги е възможно. Права ли е тя? (Ако две хорди имат общ връх, считаме, че те се пресичат.) [5 точки]

Задача 3. Квадратът

a	b	c
d	e	f
g	h	i

е магически: сборът на числата във всеки ред, стълб и в двата диагонала е един и същ. Докажете, че:

а) $2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e$. [3 точки]

б) $2(a^3+c^3+g^3+i^3) = b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$. [3 точки]

Задача 4. В остроъгълен триъгълник е вписана окръжност с радиус R. Три допирателни към окръжността разделят триъгълника на три правоъгълни триъгълника и шестоъгълник. Периметърът на шестоъгълника е равен на Q. Да се намери сборът на диаметрите на вписаните в трите правоъгълни триъгълника окръжности. [6 точки]

Задача 5. Дадена е картина с размери 1×1. Правоъгълно парче хартия с лице 2 се нарича *обвивка*, ако картината може да се увие с хартията, без хартията да се реже. Ясно е, че правоъгълник 2×1 и квадрат със страна $\sqrt{2}$ са обвивки.

а) Докажете, че има и други обвивики. [4 точки]

б) Докажете, че има безбройно много обвивки. [3 точки]

Задача 6. Нека $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, където $\frac{a_n}{b_n}$ е несъкратима дроб. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $b_{n+1} < b_n$. [8 точки]

Задача 7. Фокусник има тесте от 52 карти за игра. Зрителите искат да научат реда на картите в тестето (без значение отгоре надолу или обратно). Те могат да питат колко карти има между две определени карти (например между асо пика и деветка спатия). Един от зрителите знае реда на картите. Какъв е минималният брой въпроси, които той трябва да зададе на фокусника, за да могат останалите зрители да разберат реда на картите?
[9 точки]