28. Международен математически Турнир на градовете

Есенен тур, 2006 г.

Тренировъчен вариант, 7-9 клас

Резултатът се определя от трите задачи, оценени с най-много точки.

Задача 1. Две цели положителни числа x и y са записани на дъската в ненамаляващ ред (т.е. $x \leq y$). Мария записва в тетрадката си x^2 и след това заменя числата на дъската с x и $y - x$, записани отново в ненамаляващ ред. Тя повтаря същата операция с новите две числа и т.н. докато едното от двете числа на дъската стане равно на нула. Какъв ще бъде сборът от числата в тетрадката на Мария? [4 точки]

Задача 2. Лъжците винаги лъжат, честните хора винаги казват истината, а хитреците понякога казват истината, а понякога лъжат. Можете да задавате въпроси, чиито отговори са "да" или "не" (като например "този човек лъжец ли е?").

а) Пред вас са един лъжец, един честен човек и един хитрец. Всеки от тях знае какви са останалите. Как може да се определи кой какъв е? [1 точка]

б) Пред вас са един лъжец, един честен човек и двама хитреци. Всеки от тях знае какви са останалите. Докажете, че хитреците могат да се уговорят да отговарят по такъв начин, че да не може да се определи какъв е всеки от четиримата. [3 точки]

Задача 3. а) На дъската са написани 2007 цели положителни числа, по-големи от 1. Докажете, че някои от числата могат да се изтрият така, че произведението на останалите числа да се записва във вида $a^2 - b^2$ за някои положителни цели числа a и b. [2 точки]

б) На дъската са написани 2007 цели положителни числа, по-големи от 1, едно от които е 2006. Докажете, че ако има само едно число, за което произведението на останалите числа се записва във вида $a^2 - b^2$ за някои положителни цели числа a и b, то това число е 2006. [2 точки]

Задача 4. На продължението на страната BC на триъгълника ABC е избрана точка B' (B е между B' и C), така че $BB' = AB$. Ъглополовящите на външните ъгли при върховете B и C се пресичат в точка M. Докажете, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност. [4 точки]

Задача 5. Квадрат е разрязан на n еднакви не изпъкнали многоъгълника така, че всички страни на тези многоъгълници са успоредни на страните на квадрата и никой многоъгълник не се получава от друг чрез транслация. Каква е най-голямата възможна стойност на n? [4 точки]