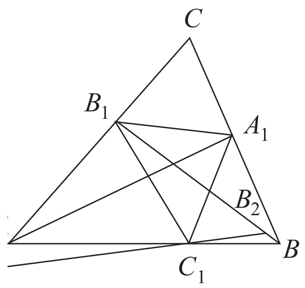
28. Международен Турнир на градовете
Есенен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Виж задача 2. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 2. Върху страните BC, AC и AB на остроъгълен $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1, B_1 и C_1 така, че A_1A, B_1B и ${}_1C$ са ъглополовящи в $\triangle A_1B_1C_1$. Докажете, че AA_1, BB_1 и ${}_1$ са височини в $\triangle ABC$.

Решение: Да прекараме ъглополовящите на външните ъгли на $\triangle A_1B_1C_1$. Нека ъглополовящите на външните ъгли при B_1 и C_1 се пресичат в точка A_2; аналогично определяме точките B_2 и C_2. Точката A_2 лежи и на ъглополовящта на $\sphericalangle A_1$ (тъй като A_2 е равноотдалечена от правите A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1), т.е на правата A_1A. Следователно в $\triangle A_2B_2C_2$ правите AA_1, BB_1 и ${}_1$ са височини.

Ще докажем, че $\triangle A_2B_2C_2$ съвпада с $\triangle ABC$. Да допуснем, че това не е така и нека точка A_2 се намира извън $\triangle ABC$. Тогава лъчът A_2B_2 пресича



страната AB на $\triangle ABB_1$ (в точка C_1) и не пресича отсечката AB_1 (разделя ги правата A_2A_1). Следователно този лъч пресича страната BB_1 на $\triangle ABB_1$, т.е. точка B_2 е вътрешна за отсечката BB_1, и следователно е вътрешна за $\triangle ABC$. Аналогично, точка C_2 се намира във вътрешността на $\triangle ABC$. Но отсечката B_2C_2 пресича страната BC в точка A_1. Противоречие.

По същия начин се получава противоречие и когато точка A_2 е в $\triangle ABC$.

Задача 3. Числото $a = 0,12457...$ е такова, че неговата n-та цифра след десетичната запетая е равна на последната цифра преди десетичната запетая на числото $n\sqrt{2}$. Докажете, че числото a е ирационално.

Решение: Да допуснем, че a е рационално число. Тогава то се представя като периодична десетична дроб с период m. Следователно цифрите след дестеичната запетая на a, записани в позиции $m, 10m, 100m, \ldots, 10^k m, \ldots,$

съвпадат от някакъв момент нататък. В същото време това са последователни цифри в десетичното представяне на ирационалното число $m\sqrt{2}$, което е непериодична дроб. Противоречие.

Задача 4. Може ли всяка призма да се разреже на пирамиди, така че основата на всяка пирамида да е в основата на призмата, а върхът на пирамидата да е върху другата основа на призмата?

Решение: Не може. Да разгледаме централно сечение на призмата. Всяка възможна пирамида пресича това сечение по многоъгълник, чието лице е 4 пъти по-малко от лицето на нейната основа. Сборът от лицата на основите на тези пирамиди трябва да е равен на лицето на двете основи на призмата. Но тогава сборът от лицата на сеченията с централното сечение е равен на половината от лицето на основата на призмата, т.е дори централното сечение не е запълнено.

Задача 5. Виж задача 6. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 6. Казваме, че колода от 52 карти е в правилен ред, ако всеки две съседни карти са или от еднакъв цвят, или с еднаква стойност, като това е вярно и за първата и последната карти. Най-горната карта е асо пика. Докажете, че броят на начините, по които могат да се подредят картите в правилен ред: а) се дели на 12!; б) се дели на 13!.

Решение: Да разгледаме таблица 4×13, чийто редове са означени отгоре надолу със спатия, каро, купа, пика, а стълбовете са означени отдясно наляво с асо, 2,3,4..., 10, вале, дама, поп. По този начин на всяка карта съответства поле на таблицата. На произволна колода от карти съпоставяме таблица, във всяка клетка на която сме записали поредния номер на съответната карта. Таблица, съответстваща на правилно разположение на картите, има следните свойства:

1. В долния ляв ъгъл е записано числото 1 (тъй като асо пика е първата карта в колодата).

2. Всеки две последователни числа (52 и 1 също се разглеждат като последователни) са в един ред или един стълб.

Да наречем такава таблица правилна.

а) Да разгледаме правилна таблица и да приложим произволна пермутация на стълбовете без първия (има 12! такива пермутации). Тъй като числото 1 остава в долния ляв ъгъл и всеки две последователни числа остават в един ред или един стълб, отново получаваме правилна таблица. По този начин всички правилни таблици се разбиват на непресичащи се класове, всеки от който има 12! елемента. Следователно броят на всички правилни таблици се дели на 12!.

б) Достатъчно е да докажем, че броят на правилните таблици се дели на 13. Да образуваме цилиндър като залепим двете крайни вертикални страни на една правилна таблица. Обхождането на този цилиндър може да започне от всяко поле от първия ред, като следваме последователността на първоначалното обхождане (от 52 отиваме в 1). Получаваме 13 обхождания. Да допуснем, че обхожданията, започнали от полета a и b, съвпадат. Тогава същото обхождане се получава и от клетка $b + (b - a)$ (по модул 13). Тъй като 13 е просто число, ще получим, че всички обхождания съвпадат. Това означава, че от реда, в който за първи път се появяват две последователни числа, не може да се излезе, което е противоречие. Следователно получените 13 обхождания са различни, т.е. броят на правилните таблици се дели на 13.

Задача 7. Положителните числа $x_1, \dots, x_k$ са такива, че

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \qquad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажете, че $k > 50$.

б) За някоя стойност на k дайте пример на такива числа.

в) Намерете минималното k, за което съществува такъв пример.

Решение: а) По условие $4(x_1^2 + \cdots + x_k^2) < 2(x_1 + \cdots + x_k) < x_1^3 + \cdots + x_k^3$. Следователно поне за едно число, например за x_1, е изпълнено неравенството $4x_1^2 < x_1^3$, т.е. $x_1 > 4$, откъдето

$$(2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2.4^2 = -28.$$

Минимумът на функцията $2x^2 - x$ е равен на $-\dfrac{1}{8}$, оттук

$$-\frac{1}{8}(k-1) \le (2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < -28$$

и получаваме $k - 1 > 8.28 > 50$.

б) Да изберем $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2501} = 0,1$. Тогава

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_{2501}^2 &= 100 + 25 = 125 \\ x_1 + \cdots + x_{2501} &= 10 + 250 = 260 \\ x_1^3 + \cdots + x_{2501}^3 &> 1000 \end{aligned}$$

и всички неравенства са изпълнени.

Решението на в) следва.