28. Международен Турнир на градовете

Есенен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. На дъската са записани три цели положителни числа x, y и z. Мария си записва в тетрадка произведението на някои две от числата и намалява третото число на дъската с 1. С новите три числа тя извършва същата операция и т.н., докато едно от числата на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът на числата в тетрадката на Мария?

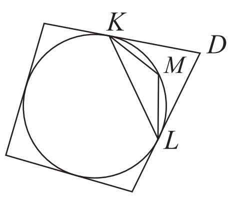
Решение: Произведението на числата на дъската при всеки ход се намалява със записаното в тетрадката число. Когато едно от числата стане равно на 0, произведението на числата на дъската също става 0. Следователно сборът на числата в тетрадката е xyz.

Задача 2. В четириъгълник е вписана окръжност. Допирните точки на окръжността със страните на четириъгълника са свързани последователно с отсечки. Така са получени четири триъгълника, всеки от които има върхове в две допирни точки и един връх на четириъгълника. Докажете, че диагоналите на четириъгълника с върхове центровете на вписаните в четирите триъгълника окръжности, са перпендикулярни.

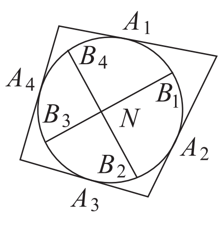
Решение: Първо ще докажем, че центърът на вписаната окръжност на всеки от разглежданите триъгълници е среда на вътрешната за триъгълника дъга от вписаната в дадения четириъгълник окръжност. Нека D е общият връх на страните на четириъгълника, допиращи се до вписаната окръжност в точки K и L (фиг. 1). Нека M е средата на дъгата KL, лежаща в $\triangle DKL$. От равенството

$$\sphericalangle MKL = \frac{\overset{\frown}{ML}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} = \sphericalangle MKD$$

следва, че KM е ъглополовяща на $\sphericalangle DKL$. Аналогично ML е ъглополовяща на $\sphericalangle KLD$. Следователно M е център на вписаната в $\triangle KLD$ окръжност.



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека допирните точки на четириъгълника с вписаната окръжност са A_1, A_2, A_3, A_4, а средите на дъгите $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_1}$ са B_1, B_2, B_3, B_4 (фиг. 2). Трябва да докажем, че $B_1B_3 \perp B_2B_4$. Ако тези отсечки се пресичат в т. N, намираме

$$\sphericalangle B_1NB_2 = \frac{\overset{\frown}{B_1B_2}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_3B_4}}{2} = \frac{1}{4}(\overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4A_1}) = 90^\circ.$$

Задача 3. В полетата на таблица 2006×2006 по произволен начин са записани числата $1, 2, 3, \dots, 2006^2$. Да се докаже, че съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4.

Решение: Измежду записаните числа всеки остатък при деление на 4 $(0, 1, 2, 3)$ се среща по 1003^2 пъти. Да допуснем, че няма съседни числа с картен на 4 сбор и да разделим таблицата на 1003^2 квадрата със страна 2. Всеки две полета в такъв квадрат са съседни, следователно в един квадрат има най-много едно число, което дава остатък 0 (също остатък 2) при деление на 4. Тъй като числата, даващи остатък 0 (остатък 2) са точно 1003^2, то във всеки квадрат има едно число, даващо остатък 0 (остатък 2) при деление на 4. В останалите две полета не може да има числа, даващи различни остатъци (1 и 3) при деление на 4. Следователно броят на числата, даващи остатък 1 (остатък 3) е четен. Противоречие.

Следователно съществуват числа с желаното свойство.

Задача 4. Дадена е безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots$ и безкрайна геометрична прогресия $b_1, b_2, \dots$. Всички членове на геометричната прогресия са членове и на аритметичната прогресия. Докажете, че частното на геометричната прогресия е цяло число.

Решение: Ако частното на геометричната прогресия q е 1, задачата е решена. Иначе разглеждаме частното

$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{b_2 - b_1} = q^n.$$

Тъй като членовете на геометричната прогресия са членове и на аритметичната, това частно е рационално число. Оттук q е рационално. От друга страна, ако d е разликата на аритметичната прогресия, то числото

$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{d} = \frac{(b_2 - b_1)q^n}{d}$$

е цяло за всяко n, следователно q е също цяло число.

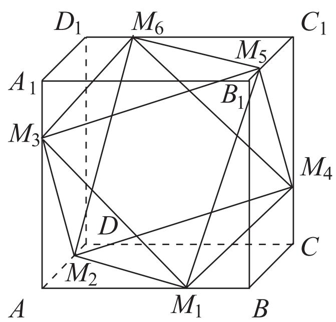
Задача 5. Може ли правилният октаедър да бъде вписан в куб така, че всички върхове на октаедъра да са върху рубовете на куба? (Правилният октаедър има 6 върха, от всеки връх излизат по 4 ребра и всички стени са равностранни триъгълници.)

Решение: Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е куб с ребро 1. На ребрата AB, AD, AA_1, CC_1, B_1C_1, C_1D_1 вземаме съответно точки $M_1, M_2, \ldots, M_6$ така, че $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = \dfrac{3}{4}$. Тогава

$$\begin{aligned} & M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = M_4M_5 = M_5M_6 = M_6M_1 = \\ = \ & \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & M_1M_4 = M_1M_5 = M_2M_4 = M_2M_6 = M_3M_5 = M_3M_6 = \\ = \ & \sqrt{2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$



Оттук триъгълниците

$$\begin{gathered} M_1M_2M_3,\ M_4M_5M_6,\ M_1M_4M_5,\ M_2M_4M_6, \\ M_3M_5M_6,\ M_4M_1M_2,\ M_5M_1M_3,\ M_6M_2M_3 \end{gathered}$$

са равностранни и точките $M_1, M_2, \ldots, M_6$ са върхове на октаедър.