# 28. Международен Турнир на градовете

## Есенен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

**Задача 1.** В правилен седмоъгълник е вписана окръжност и около него е описана окръжност. Същата операция е направена и с правилен 17-ъгълник. Така двата многоъгълника са затворени в пръстени, които имат равни лица. Да се докаже, че двата многоъгълника имат равни страни.

**Решение:** Да означим с $2a$ страната на правилен многоъгълник, а с $r$ и $R$ съответно радиусите на вписаната и описаната окръжност. Вписаната окръжност се допира до страните в средите им и радиусите са перпендикулярни на страните. От питагоровата теорема намираме $a^2 + r^2 = R^2$. Тъй като лицето на пръстена е равно на $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$, получаваме твърдението на задачата.

**Задача 2.** Постъпвайки на нова работа, Ани винаги се интересува кои от нейните колеги се познават. За да запомни по-лесно тази информация, тя рисува окръжност и представя всеки колега като хорда. При това, ако две хорди се пресичат, то съответните хора се познават, а ако не се пресичат, то съответните колеги не се познават. Ани е сигурна, че това винаги е възможно. Права ли е тя? (Ако две хорди имат общ връх, считаме, че те се пресичат.)

**Решение:** Ще покажем контрапример, откъдето ще следва, че Ани не е права. Да разгледаме домакин, трите му сина и трима гости. Измежду гостите няма познати, домакинът ги познава и тримата, а тримата му сина се познават с трите различни двойки от гостите. Хордите на гостите пресичат хордата на домакина в три различни точки. Гостенинът, съответстващ на средната точка ще наречем среден, а другите двама - крайни. Ясто е, че крайните хорди са от различни страни на средната. Хордата на сина, познаващ само крайните гости, трябва да пресече крайните хорди, но да не пресича средната, което е противоречие.

**Задача 3.** Квадратът

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

е магически: сборът на числата във всеки ред, стълб и в двата диагонала е един и същ. Докажете, че:

а) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

б) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

**Решение:** а) Като прибавим към двете страни на равенството в а) сбора $b+d+f+h$, получаваме еквивалентно равенство, което може да се запише във вида

$$\begin{aligned} & (a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i)= \\ = \;& 2(b+e+h)+2(d+e+f) \end{aligned}$$

Тъй като сборът на числата във всеки ред, стълб и диагонал е един и същ, последното равенство очевидно е изпълнено.

б) Да означим с $S$ сбора на числата във всеки ред. Тогава $a+i=c+g=b+h=d+f=S-e$. Като заместим в равенството от а), получаваме $4(S-e)=2(S-e)+4e$, откъдето $S=3e$.

Първо ще докажем равенството

$$2(a^2+c^2+g^2+i^2)=b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2.$$

За целта ще го запишем във вида

$$\begin{aligned} & (a+c)^2+(c+i)^2+(a+g)^2+(g+i)^2-2(ac+ci+ag+gi)= \\ = \;& (h+e)^2+(d+e)^2+(f+e)^2+(b+e)^2-2e(b+d+f+h). \end{aligned}$$

Сборовете от квадратите от двете страни на равенството са равни, тъй като $a+c=S-b=h+e$ и т.н. Освен това,

$$ac+ci+ag+gi=(a+i)(c+g)=(S-e)^2=2e(S-e)=e(b+d+f+h).$$

Да забележим, че равенството от б) остава вярно при прибавяне на едно и също число към всички числа от таблицата. Наистина,

$$\begin{aligned} & 2((a+t)^3+(c+t)^3+(g+t)^3+(i+t)^3)= \\ = \;& 2(a^3+c^3+g^3+i^3)+6t(a^2+c^2+g^2+i^2)+6t^2(a+c+g+i)+8t^3= \\ = \;& b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3+3t(b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2)+ \\ & +3t^2(b+d+f+h+4e)+8t^3= \\ = \;& (b+t)^3+(d+t)^3+(f+t)^3+(h+t)^3+4(e+t)^3. \end{aligned}$$

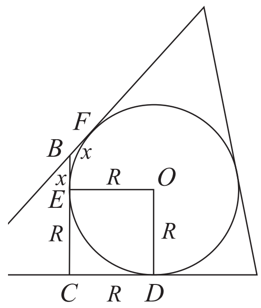
Следователно е достатъчно да докажем твърдението за $e=0$. В този случай

$$a+i=c+g=a+c=g+i=b+h=d+f=2e=0$$

и двете страни на равенството са равни на 0.

**Задача 4.** В остроъгълен триъгълник е вписана окръжност с радиус $R$. Три допирателни към окръжността разделят триъгълника на три правоъгълни триъгълника и шестоъгълник. Периметърът на шестоъгълника е равен на $Q$. Да се намери сбора на диаметрите на вписаните в трите правоъгълни триъгълника окръжности.

**Решение:** Допирните точки на вписаната окръжност и върховете разделят периметъра на шестоъгълника на 12 отсечки. Отсечките през върховете на правите ъгли на шестоъгълника са равни на $R$ (например, като прекараме радиусите $OD$ и $OE$ в допирните точки, ще получим квадрат $CDOE$, откъдето $CD = CE = R$).
Ако означим допирателните от останалите три върха с $x, y, z$, периметърът на шестоъгълника е равен на




$$Q = 6R + 2x + 2y + 2z.$$

Диаметърът на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност е равен на сбора на катетите минус хипотенузата. За $\triangle ABC$ диаметърът на вписаната окръжност е

$$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x,$$

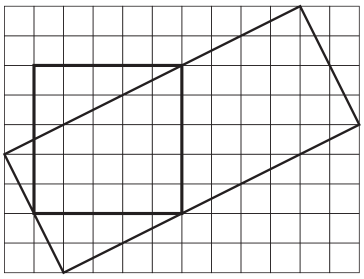
тъй като допирателните $AD$ и $AF$ са равни. Аналогично, другите два диаметъра са равни на $2y$ и $2z$, откъдето намираме, че сборът на трите диаметъра е равен на $2x + 2y + 2z = Q - 6R$.

**Задача 5.** Дадена е картина с размери $1 \times 1$. Правоъгълно парче хартия с лице 2 се нарича обвивка, ако картината може да се увие с хартията, без хартията да се реже. Ясно е, че правоъгълник $2 \times 1$ и квадрат със страна $\sqrt{2}$ са обвивки.

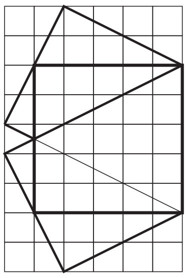
а) Докажете, че има и други обвивки.

б) Докажете, че има безбройно много обвивки.

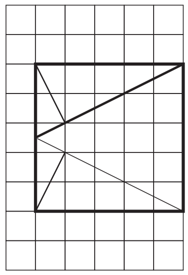
**Решение:** Ще докажем, че правоъгълник $\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ е обвивка. Да поставим този правоъгълник върху квадрата така, че два от върховете на квадрата да са върху страните, равни на $\sqrt{5}$, а един връх да съвпада със средата на третата страна (фиг. 1). Процесът на опаковането е показан на фиг. 2 и фиг. 3.



Фиг. 1

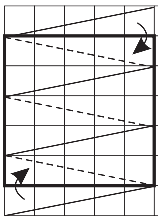


Фиг. 2

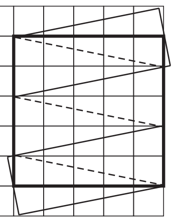


Фиг. 3

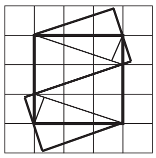
б) Да разделим вертикалните страни на квадрата на $n$ части. На фиг. 4 е показано опаковането на квадрат с успоредник, по-малката страна на който е равна на $\dfrac{2}{n}$ (при $n = 5$), а на фиг. 5 – превръщането на успоредника в правоъгълник. На фиг. 6 е показано (за $n = 3$) самото прегъване.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

*Забележка.* При $n = 1$ се получава опаковане с квадрат $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ , при $n = 2$ – с правоъгълник $\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (фиг. 3), при $n = 3$ - правоъгълник $\sqrt{10}\times\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ (фиг. 6).

**Задача 6.** Нека $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\dfrac{a_n}{b_n}$, където $\dfrac{a_n}{b_n}$ е несъкратима дроб. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа $n$, за които $b_{n+1} < b_n$.

**Решение:** Нека $n = p(p-1)-1$, където $p$ е нечетно просто число. Да забележим, че $b_{n+1}$ не се дели на $p$. Наистина, в разглеждания сбор само знаменателите на дробите $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{2p}, \dots, \dfrac{1}{(p-1)p}$ се делят на $p$, но те могат да се групират по двойки така, че знаменателят на сбора да не се дели на $p$:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p-1)}=\frac{1}{p-1}, \qquad \frac{1}{2p}+\frac{1}{p(p-2)}=\frac{1}{2(p-2)}\dots$$

Освен това,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

Да допуснем, че числителят и знаменателят на последната дроб се делят на $d$, т.е.

$$\begin{aligned} a_{n+1}(p-1)p &\equiv b_{n+1} \pmod{d} \\ b_{n+1}(p-1)p &\equiv 0 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Тогава

$$a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Числата $d$ и $p$ са взаимно прости (иначе $b_{n+1}$ ще е кратно на $p$). Числата $d$ и $a_{n+1}$ също са взаимно прости (иначе $b_{n+1}$ ще се дели на техен общ делител, т.е. $a_{n+1}$ и $b_{n+1}$ няма да са взаимно прости). Следователно $(p-1)^2$ се дели на $d$ и $d \le (p-1)^2$. Оттук

$$b_n \ge \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}$$

и твърдението на задачата следва от съществуването на безбройно много прости числа.

**Задача 7.** Фокусник има тесте от 52 карти за игра. Зрителите искат да научат реда на картите в тестето (без значение отгоре надолу или обратно). Те могат да питат колко карти има между две определени карти (например между асо пика и деветка спатия). Един от зрителите знае реда на картите. Какъв е минималният брой въпроси, които той трябва да зададе на фокусника, за да могат останалите зрители да разберат реда на картите?

**Решение:** Ще докажем, че въпросите са най-малко 34.

Първият зрител задава въпрос за двете крайни карти. Отговорът на фокусника е 50 и показва на всички, че тези карти са крайни. Да наречем едната първа, а другата – 52-ра. Трябва да определим номерата на всички останали карти. Да наречем втората карта *дупка* и с втори въпрос да попитаме за двете съседни на дупката карти, т.е. за първа и трета карти. Отговорът е 1 и определя еднозначно положението на третата карта. След това продължаваме да задаваме въпроси по двойки:

- при нечетните въпроси питаме за двете крайни карти, които още не са споменавани (едната от тях е дупка, а другата - не);

- определяме нова дупка, която е неспоменатата карта в съседство с не-дупката;
- при следващия (четен) въпрос питаме за двете съседни на дупката карти.

Забелязваме, че дупката се появява първо по-близо до началото, след това по-близо към края и т.н. В първата двойка въпроси се казват карти 1, 52 и 3, във втората двойка - карти 2, 51 и 49, в третата двойка - карти 4, 50 и 6 и т.н. След отговорите на поредната двойка въпроси има два възможни варианта за разположението на трите назовани карти: основен (този, който е в действителност) и страничен (при който крайните карти си сменят местата и средната се премества по съответен начин). Например, след отговорите на въпроси 3 и 4 е ясно, че втората тройка е 2, 51 и 49 или 2, 51 и 4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Основен вариант | $a\,b\,a$ | $\ldots$ | $b \smile b\,a$ |
| Страничен вариант | $a\,b\,a\,b$ | $\ldots$ | $b\,a$ |

(Картите от една тройка са еднакво означени.)

Тази неопределеност ще изчезне след отговора на следващия (пети) въпрос (за карти 4 и 50). Това е така, защото в страничния вариант броят на картите между по-рано не споменатите крайни карти е най-много 44 и е по-малък от броя им в основния (който е 45). Следователно, като зададем 33 въпроса, ще уточним мястото на 48 карти. Последният, 34-и въпрос, ще зададем за 25-а и 26-а карта:

$$abacdcefeghgijiklkmnmoPoQQ \smile PQPnonlmljkjhihfgfdedbcba$$

(Предпоследната и последната тройка са означени съответно с $P$ и $Q$.)

От този въпрос еднозначно се определя положението на последната тройка и единствената останала карта.

За да докажем, че по-малко въпроси не са достатъчни, ще разбием всички карти на 52 групи по една карта. При въпрос за две карти от различни групи, обединяваме двете групи в една. Ясно е, че всеки въпрос намалява броят на групите най-много с 1. Ако са зададени не повече от 33 въпроса, ще останат не по-малко от $52-33=19$ групи. Групите с 3 карти са не повече от 17 (тъй като $18.3=54>52$). Следователно или ще се намерят две групи с по една карта, или група с точно две карти. И в двата случая, като сменим местата на тези две карти, отговорите няма да се променят; това означава, че последователността на картите не може да се възстанови.