28. Международен Турнир на градовете
Есенен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Две цели положителни числа x и y са записана дъската в ненамаляващ ред, т.е. $x \leq y$. Мария записва в тетрадката си x^2 и след това заменя числата на дъската с x и $y-x$, записани отново в ненамаляващ ред. Тя повтаря същата операция с новите числа и т.н. докато едното от двете числа на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът от числата в тетрадката на Мария?

Решение: Да разгледаме правоъгълник със страни x и y. На първата стъпка да отрязваме от правоъгълника квадрат със страна x и записваме лицето му, на втората извършваме същата оерация с новия правоъгълник и т.н. Накрая правоъгълникът ще бъде разрязан на квадрати, чийто лица са записани. Сборът на тези числа е равен на лицето на дадения правоъгълник, т.е. на xy.

Задача 2. Лъжцте винаги лъжат, честните хора винаги казват истината, а хитреците понякога казват истината, а понякога лъжат. Можете да задавате въпрос, чийто отговор е "да"или "не"(например: "този човек хитрец ли е?").

а) Пред вас са един лъжец, един честен човек и един хитрец. Всеки от тях знае какви са останалите. Как може да се определи кой какъв е?

б) Пред вас са един лъжец, един честен човер и двама хитреци. Всеки от тях знае какви са останалите. Докажете, че хитреците могат да се уговорят да отговарят по такъв начин, че да не може да се определи какъв е всеки от четиримата.

Решение: а) Питаме всеки от тримата "Вярно ли е, че и двамата ти съседи са лъжци?". Между трите отговора ще има "Да"на лъжеца и "Не"на честния. Тъй като отговорите са три, то "Да"или "Не"ще се появи точно един път. По този отговор ще познаем един от тримата – честния или лъжеца. Като му зададем въпрос за един от другите двама ”Вярно ли е, че той е хитрец?”, ще разберем окончателно кой какъв е.

б) Да означим участниците: лъжеца с Л, честния човек с Ч и хитреците с ХЛ и ХЧ. Ако хитреците се уговорят да отговарят така, все едно ХЛ е лъжец, ХЧ е честен човек, Л е хитрец, който се представя за лъжец, а Ч е хитрец, който се представя за честен човек, тогава Л и ХЛ стават неразличими, също и Ч и ХЧ.

Задача 3. а) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1. Докажете, че някои от числата могат да се изтрият така, че произведението на останалите числа да се записва като разлика на квадратите на две естествени числа.

б) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1, едно от които е 2006. Докажете, че ако има само едно число, за което произведението на останалите числа се записва като разлика на квадратите на две естествени числа, то това число е 2006.

Решение: *Лема.* Естествено число се представя като разлика на квадрати на две естествени числа или когато е нечетно, по-голямо от 1, или когато се дели на 4 и е по-голямо от 4.

Наистина, ако числото n се представя като разлика на квадрати на естествени числа, т.е. $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, то е произведение на два различни множителя с еднаква четност (сборът им е четно число). Ако са нечетни, то и n е нечетно и е по-голямо от 1. Ако са четни, то n се дели на 4 и е по-голямо от $2.2 = 4$.

От друга страна, нечетното число $n = 2k+1,\ k \geq 1$, се представя като разлика на квадрати по следния начин: $n = (k+1)^2 - k^2$, а за кратното на 4 число $n = 4k,\ k > 1$ представянето е $n = (k+1)^2 - (k-1)^2$.

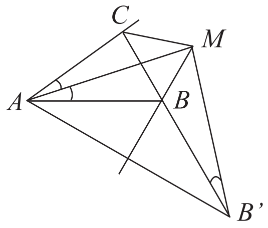
а) Твърдението следва от лемата, тъй като винаги може да се зачеркне едно число така, че или да не останат четни числа (произведението ще е нечетно, по-голямо от 1), или да останат поне две четни числа (произведението ще се дели на 4 и ще е по-голямо от 4).

б) Числото 2006 е четно. Ако има друго четно число n, то може да се зачеркне произволно число освен n и 2006, което противоречи на условието. Следователно няма други четни числа. Тогава можем да зачеркнем 2006 (произведението на останалите числа е нечетно и е по-голямо от 1) и не може да се зачеркне друго число (2006 е четно, но не се дели на 4).

Задача 4. На продължението на страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка B' (B е между B' и C) така, че $BB' = AB$. Външните ъглополовящи при ъглите B и C се пресичат в точка M. Докажете, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.
на AB', откъдето получаваме, че $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BB'M$. Тогава $\sphericalangle CB'M = \sphericalangle BB'M = \sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Отсечката CM се вижда от точките A и B' под равни ъгли, което означава, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.

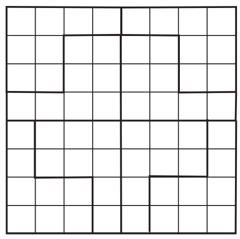
Задача 5. Квадрат е разрязан на n еднакви не изпъкнали многоъгълника така, че всички страни на тези многоъгълници са успоредни на страните на квадрата и никой многоъгълник не се получава от друг чрез транслация.

Решение: Точката M е равноотдалечена от правите AC и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle C$), и от правите AB и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle B$). Следователно M е равноотдалечена от рамената на $\sphericalangle BAC$, значи AM е ъглополовяща на този ъгъл, откъдето получаваме $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Тъй като $\triangle ABB'$ е равнобедрен, то MB е симетрала



Каква е най-голямата възможна стойност на n?

Решение: Ще докажем, че търсената стойност е 8. Пример за разрязване на 8 многоъгълника е даден на чертежа.
От друга страна, многоъгълникът може да се постави по не повече от 8 начина (с точност до успоредно пренасяне). Наистина, да разгледаме три негови последователни върха A, B и C (по тяхното разположение положението на многоъгълника се определя еднозначно).



Можем да считаме, че точката B е фиксирана. От нея страната BA може да се прекара по 4 начина (в четирите посоки, успоредно на страните на квадрата) и след това - страната BC по два начина.