28. Международен Турнир на градовете
Пролетен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

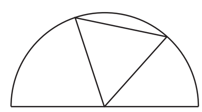
Задача 1. На параболата $y = x^2$ са избрани четири точки A, B, C, D така, че отсечките AB и CD се пресичат на ординатната ос. Намерете абсцисата на точка D, ако абсцисите на точките A, B и C са равни съответно на a, b и c.

Решение: Нека уравнението на правата AB е $y = kx + l$, а на правата CD е $y = mx + l$ (свободните членове са равни, тъй като двете прави пресичат ординатната ос в една и съща точка). Тогава a и b са корените на уравнението $x^2 = kx + l$ и от формулите на Виет $ab = -l$. Аналогично $cd = -l$, където d е абсцисата на точката D. Оттук $d = \dfrac{ab}{c}$.

Задача 2. Изпъкнала фигура F притежава свойството: всеки равностранен триъгълник със страна 1 може да се транслира така, че всичките му върхове да лежат на контура на F. Следва ли от това, че F е кръг?

Решение: Ще докажем, че фигура с даденото свойство не е задължително кръг, като разгледаме полукръг с радиус 1.

Достатъчно е да покажем, че равностранен триъгълник със страна 1 може да се завърти на 120°, като върховете му остават на контура на полукръга. Това условие очевидно е изпълнено за триъгълник с връх в центъра на полукръга, който се върти около този център.



Задача 3. Нека $f(x)$ е многочлен, различен от константа. Възможно ли е уравнението $f(x) = a$ при всяка стойност на a да има четен брой решения?

Решение: Ако степента на f е нечетна, то при достатъчно голямо a уравнението $f(x) = a$ има точно едно решение.

Нека степента на f е четна. Без огранчение приемаме, че старшият коефициент е положителен (иначе умножаваме f с -1). Разделяме числовата ос на интервали, в които функцията f е монотонна. Ясно е, че f намалява в най-левия интервал и расте в най-десния; редуват се интервали на растене и намаляване. Следователно броят на интервалите е четен и оттук – броят на локалните екстремуми на функцията f е нечетен. Тогава съществува стойност a_0 (например най-големия локален екстремум), която се достига нечетен брой пъти .

Задача 4. Виж задача 7. от Основния вариант за 7. – 9. клас.

Задача 5. От правилен октаедър с ребро 1 са отрязани 6 ъгъла с форма на правилна четириъгълна пирамида с ребро $1/3$. Така е получен многостен, чиито стени са квадрати и правилни шестоъгълници. Може ли пространството да се пакетира с многостени от този вид?

Решение: Ще докажем, че такова пакетиране е възможно.

Да оцветим тези точки в пространството, чиито координати са цели числа с една и съща четност. За всяка оцветена точка M определяме множеството точки, разстоянието от които до M е не по-голямо от разстоянието до всяка друга оцветена точка. По този начин цялото пространство се разбива на множества с общи граници. Тези множества се получават едно от друго чрез транслация и следователно са еднакви. Ще докажем, че те са подобни на дадения многостен.

Да разгледаме множеството M_O, съответстващо на точката $O(0,0,0)$. Свързваме O с 'най-близките' осем оцветени точки – $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. През средата на всяка построена отсечка построяваме перпендикулярна на съответната отсечка равнина (средите са $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$). Тези осем равнини 'отсичат' октаедър с върхове в точките $(\pm 3/2, 0, 0), (0, \pm 3/2, 0), (0, 0, \pm 3/2)$. Равнината $x = 1$, която отделя O от точката $(2,0,0)$, отсича от този октаедър по една трета от страните, излизащи от неговия връх $(3/2, 0, 0)$. Аналогично отрязват от октаедъра останалите равнини, отделящи O от оцветените точки $(-2,0,0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$.

Задача 6. Дадено е ирационално число α, за което $0 < \alpha < 1/2$. Числото α_1 се определя като по-малкото от числата 2α и $1 - 2\alpha$. По същия начин се определя и α_2 като по-малкото от числата $2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_1$, и т.н.

а) Докажете, че за някое n е изпълнено неравенството $\alpha_n < 3/16$.

б) Възможно ли е неравенството $\alpha_n > 7/40$ да е изпълнено за всяко естествено число n?

Решение: Дадената редица е дефинирана по следния начин:

$$\alpha_0 = \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n < \dfrac{1}{4}; \\ 1 - 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

От дефиницията следва лесно, че всички членове на редицата са в интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

а) Първо ще докажем, че съществува такова n, за което α_n е по-малко от $\frac{1}{3}$. Наистина, ако $\alpha_1 > \frac{1}{3}$, то $\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 < \frac{1}{3}$.

След това ще докажем, че съществува такова n, за което $\alpha_n < \frac{1}{4}$. Ако намереното на предишната стъпка α_k удовлетворява това условие, твърдението е доказано. Иначе имаме $\frac{1}{4} < \alpha_k < \frac{1}{3}$. Нека $\alpha_k = \frac{1}{3} - e$, където $e < \frac{1}{12}$. Ще разгледаме отклонението на всеки следващ член на редицата от $\frac{1}{3}$. Тъй като $\alpha_k > \frac{1}{4}$, то $\alpha_{k+1} = 1 - 2\alpha_k = \frac{1}{3} + 2e$. Очевидно $\alpha_{k+1} > \frac{1}{4}$, следователно $\alpha_{k+2} = 1 - 2\alpha_{k+1} = \frac{1}{3} - 4e$. При всеки следващ член отклонението от $\frac{1}{3}$ се удвоява. Ако $\alpha_{k+2} < \frac{1}{4}$, търсеното число е намерено; ако не – повтаряме процедурата и т.н., докато получим $\alpha_n < \frac{1}{4}$ (повтарянето е възможно, тъй като условието $\frac{1}{4} < \alpha_{k+2} < \frac{1}{3}$ е изпълнено).

Сега ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{1}{5}$. Ако намереното на предишната стъпка a_n не удовлетворява това условие, то $\frac{1}{5} < \alpha_n < \frac{1}{4}$ и $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n > \frac{2}{5} > \frac{1}{4}$, следователно $\alpha_{n+2} = 1 - 2\alpha_{n+1} = 1 - 4\alpha_n < \frac{1}{5}$.

Накрая ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{3}{16}$. Ако намереното на предишната стъпка a_k не удовлетворява това условие, то $\frac{3}{16} < \alpha_k < \frac{1}{5}$. Ще покажем, че при следващите членове на редицата отклонението от $\frac{1}{5}$ се увеличава. Нека $\alpha_k = \frac{1}{5} - e$, където $e < \frac{1}{80}$. Последователно намираме

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha_{k+1} & = & 2\alpha_k & = & \frac{2}{5} - 2e & > & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+2} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} + 4e & < & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+3} & = & 2\alpha_{k+2} & = & \frac{2}{5} + 8e & > & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+4} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} - 16e & &
\end{array}
$$

Ако $\alpha_{k+4} > \frac{3}{16}$, повтаряме процедурата, което е възможно, тъй като условието $a_{k+4} = \frac{1}{5} - e_1$ (където $e_1 < \frac{1}{80}$) е изпълнено.

б) Ще построим пример на редица, удовлетворяваща условието, като използваме представянето на числата във вид на безкрайни двоични дроби. Тези дроби се записват само с цифрите 0 и 1, като цифра 1 в k-ти разред след запетаята прибавя 2^{-k}. Както и при десетичните дроби, ирационалните числа се представят като безкрайни непериодични дроби.

Да разгледаме дробта $d = 0,0000001000000010...$, в която цифрите 1 са в 7-ми, 15-ти, 23-ти и т.н. разред след запетаята. Тя е равна на сбора на безкрайната геометрична прогресия $2^{-7} + 2^{-15} + 2^{-23} + \cdots = \frac{2^{-7}}{1-2^{-8}} = \frac{2}{255}$. Ако част от единиците (не крайна) непериодично се заменят с 0 и резултатът се умножи по 3, ще се получи ирационално число, по-малко от $\frac{6}{255} = \frac{2}{85}$. Такова число ще наречем *удобно*.

Нека $\alpha = \frac{1}{5} - b$, където b е удобно число. Тогава $\alpha > \frac{1}{5} - \frac{2}{85} > \frac{7}{40}$. Ще разгледаме два случая в зависимост от това дали при образуването на b цифрата 1 в 7-ми разред е заменена с 0 или не.

Ако цифрата 1 е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - c * 2^{-8}$, където числото c е удобно. Последователно намираме

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{2}{5} - c * 2^{-7}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{5} + c * 2^{-6}, \\
\alpha_3 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-5}, \\
\alpha_4 &= \frac{1}{5} - c * 2^{-4}, \\
& \dots \\
\alpha_8 &= \frac{1}{5} - c.
\end{aligned}
$$

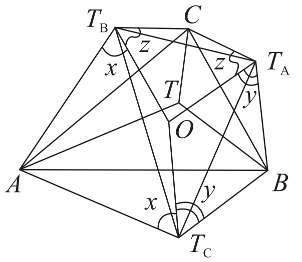
Ако цифрата 1 не е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - 3 * 2^{-7} - c * 2^{-8} = \frac{113}{640} - c * 2^{-8}$, където c е удобно число. Тогава

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{113}{320} - c * 2^{-7},\\
\alpha_2 &= \frac{47}{160} + c * 2^{-6},\\
\alpha_3 &= \frac{33}{80} - c * 2^{-5},\\
\alpha_4 &= \frac{7}{40} + c * 2^{-4},\\
\alpha_5 &= \frac{7}{20} + c * 2^{-3},\\
\alpha_6 &= \frac{3}{10} - c * 2^{-2},\\
\alpha_7 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-1},\\
\alpha_8 &= \frac{1}{5} - c.
\end{aligned}$$

И в двата случая $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7 > \frac{7}{40}$, а α_8 е число от вида на α. Следователно всички числа в редицата са по-големи от $\frac{7}{40}$.

Задача 7. Страните на триъгълник ABC се виждат от точка T под ъгъл $120°$. Докажете, че правите, симетрични на AT, BT и CT относно BC, CA и AB съответно, се пресичат в една точка.

Решение: Нека T_A, T_B, T_C са точките, симетрични на T относно правите BC, CA, AB съответно. Тъй като AT е ъглополовяща на $\sphericalangle BTC = 120°$, то нейният симетричен образ е L_A – ъглополовящата на $\sphericalangle BT_AC = 120°$. Аналогични твърдения са верни и за другите два образа L_B и L_C.



Нека O е центърът на описаната около $\triangle T_AT_BT_C$ окръжност. Радиусите

OT_A, OT_B, OT_C разделят ъглите $\sphericalangle T_A, \sphericalangle T_B, \sphericalangle T_C$ на шестоъгълника $BT_ACT_BAT_C$ на два ъгъла със сбор 120° (ако радиусът е външен за ъгъла, приемаме, че едната част е по-голяма от 120°, а другата по-малка от 0°). От друга страна, $AT_B = AT = AT_C$ и триъгълниците $\triangle AT_BO$ и $\triangle AT_CO$ са еднакви. Следователно $\sphericalangle AT_BO = \sphericalangle AT_CO = x$; аналогично $\sphericalangle BT_CO = \sphericalangle BT_AO = y$ и $\sphericalangle CT_AO = \sphericalangle CT_BO = z$. Получаваме системата $x + y = x + z = y + z = 120^\circ$, от която лесно следва, че $x = y = z = 60^\circ$. Това означава, че правите L_A, L_B, L_C се пресичат в точка O.