28. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур,

10. – 12. клас, основен вариант

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

точки	задачи	
3	1.	На параболата $y = x^2$ са избрани четири точки A, B, C, D така, че отсечките AB и CD се пресичат на ординатната ос. Намерете абсцисата на точка D, ако абсцисите на точките A, B и C са равни съответно на a, b и c.
5	2.	Изпъкнала фигура F притежава свойството: всеки равностранен триъгълник със страна 1 може да се транслира така, че всичките му върхове да лежат на контура на F. Следва ли от това, че F е кръг?
5	3.	Нека $f(x)$ е многочлен, различен от константа. Възможно ли е уравнението $f(x) = a$ при всяка стойност на a да има четен брой решения?
	4.	В своята каюта капитан Врунгел подредил в кръг разбъркана колода от 52 карти, като оставил едно свободно място. От палубата матрос Фукс, без да знае разположението на картите, назовава произволна карта. Ако тази карта е до свободното място, Врунгел я премества там, без да каже на Фукс. Иначе не прави нищо. После Фукс назовава друга карта и така колкото пъти иска, докато каже 'стоп'.
4	а)	Може ли Фукс да играе така, че накрая всяка карта да се намира различно от първоначалното си място?
4	б)	Може ли Фукс да играе така, че накрая асо пика да не е до свободното място?
8	5.	От правилен октаедър с ребро 1 са отрязани 6 ъгъла с форма на правилна четириъгълна пирамида с ребро 1/3. Така е получен многостен, чиито стени са квадрати и правилни шестоъгълници. Може ли пространството да се пакетира с многостени от този вид?
	6.	Дадено е ирационално число α, за което $0 < \alpha < 1/2$. Числото α_1 се определя като по-малкото от числата 2α и $1 - 2\alpha$. По същия начин се определя и α_2 като по-малкото от числата $2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_1$, и т.н.
4	а)	Докажете, че за някое n е изпълнено неравенството $\alpha_n < 3/16$.
4	б)	Възможно ли е неравенството $\alpha_n > 7/40$ да е изпълнено за всяко естествено число n?
8	7.	Страните на триъгълник ABC се виждат от точка T под ъгъл $120°$. Докажете, че правите, симетрични на AT, BT и CT относно BC, CA и AB съответно, се пресичат в една точка.