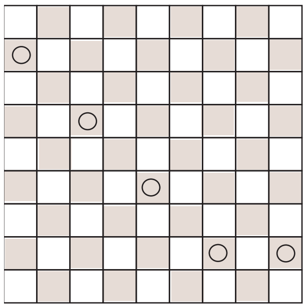
28. Международен Турнир на градовете
Пролетен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Полетата на дъска 9×9 са шахматно оцветени, като ъгловите полета са бели. Колко най-малко топа трябва да се поставят на дъската така, че те да застрашават всички бели полета? (Топът застрашава всички полета от реда и стълба, в който се намира.)

Решение: Пример с 5 топа, които застрашават всички бели полета, е показан на чертежа.



От друга страна, топ на бяло поле застрашава 7 или 9 бели полета, а топ на черно поле застрашава 9 бели полета. Тъй като белите полета са 41, четири топа очевидно не са достатъчни.

Задача 2. Многочленът x^3+px^2+qx+r има три корена в интервала $(0;2)$. Докажете неравенството $-2 < p+q+r < 0$.

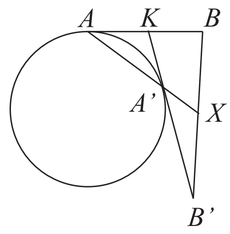
Решение: Да означим дадения многочлен с $P(x)$. Ако x_1, x_2, x_3 са трите му корена, то $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Да разгледаме стойността на многочлена при $x = 1$. Имаме

$$1 + p + q + r = P(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3).$$

Всеки от множителите в последното произведение е по модул по-малък от 1, следователно $-1 < 1+p+q+r < 1$, което е еквиавалентно на твърдението на задачата.

Задача 3. Права се допира до окръжност с център O в точка A. На правата е избрана точка B и е построен образът $A'B'$ на отсечката AB при ротация с център O. Докажете, че правата през допрните точки A и A' разполовява отсечката BB'.

Тъй като ротацията е еднаквост, то $AB = A'B'$. Също, при ротаця образът на допирателна права е отново допирателна; получаваме равенството $KA = KA'$. По теоремата на Менелай за $\triangle BKB'$, пресечен с правата AA', имаме



$$\frac{A'B'}{A'K} \cdot \frac{KA}{BA} \cdot \frac{BX}{XA} = 1.$$

Решение: Нека правите AB и $A'B'$ се пресичат в т. K и $AA' \cap BB' = X$.

Следователно $BX = AX$, което трябваше да се докаже.

Случаят, когато $AB||A'B'$ е очевиден от съображения за централна симетрия.

Задача 4. Редица от нули и единици е образувана по правилото: в k-та позиция се записва нула, когато сборът от цифрите на числото k е четен, а единица, когато сборът от цифрите на числото k е нечетен. Докажете, че редицата не е периодична.

(Началото на редицата е: 1010101011010101010 01...)

Решение: Нека редицата има период $d < 10^n$. Сборът на цифрите на числата 10^n и 10^{n+1} е равен на 1, а сборът на цифрите на числата $10^n - d$ и $10^{n+1} - d$ се различава с 9, т.е. сборовете са с различна четност. Противоречие.

Ако има предпериод, числото n се избира така, че $10^n - d$ да е по-голямо от дължината на предпериода.

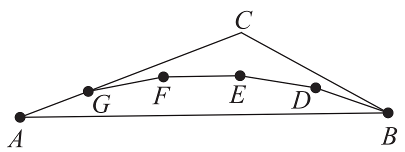
Задача 5. а) Торта има форма на тъпоъгълен тръгълник Δ_1, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

б) Същата задача за торта с форма на триъгълник с ъгли $20°$, $30°$, $130°$.

Решение: а) Виж задача 5. б) от тренировъчния вариант за 7. - 9. клас.

б) Нека в $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle A = 20°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 130°$.

Изрязваме шестоъгълник $ABDEFG$ с $\sphericalangle G = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F = 170°$, ъгли по $20°$ при страната AB и страни $BD = DE = EF = FG = GA$. (За да построим този шестоъгълник може, например, да построим дъга, от точките на която отсечката AB се вижда под ъгъл $155°$ и да я разделим на



5 равни части.)

Оставащият неизпъкнал шестоъгълник преместваме така, че страната му GF да се прилепи към страната AG на шестоъгълника $ABDEFG$.