28. Международен Турнир на градовете
Пролетен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Дадено е естествено число N. За да определи най-близкото до $\sqrt{N}$ цяло число, Петър намира най-близкия до N квадрат на естествено число a^2 и приема, че a е търсеното число. Винаги ли е верен отговорът на Петър?

Решение: Ще докажем, че отговорът на Петър винаги е верен.

Нека $\sqrt{N} = k$ и $m^2 \leq N < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Тогава a се определя по правилото:

$$a = \begin{cases} m, & N \leq m^2 + m; \\ m+1, & N > m^2 + m. \end{cases}$$

В първия случай имаме

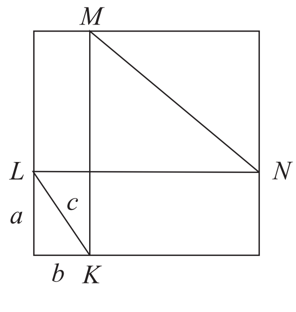
$$N < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}, \text{ т.е. } k < m + \frac{1}{2},$$

а във втория случай

$$N \geq m^2 + m + 1 > \left(m + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ т.е. } k > m + \frac{1}{2}.$$

И в двата случая a е най-близкото до k естествено число.

Задача 2. На страните на квадрат със страна 1 са означени точките K, L, M и N така, че отсечката KM е успоредна на две от страните на квадрата, а отсечката LN е успоредна на другите две страни. Отсечката KL отрязва от квадрата триъгълник с обиколка 1. На колко е равно лицето на триъгълника, който отрязва от квадрата отсечката MN?



Решение: Ще докажем, че търсеното лице е равно на $\frac{1}{4}$. Нека катетите на триъгълника, отрязан от отсечката KL, са равни на a и b, а хипотенузата е равна на c (виж чертежа). По условие $c = 1 - a - b$. Като вдигнем на това равенство на квадрат и приложим Питагоровата теорема, получаваме

$$\begin{aligned} c^2 &= (1-a-b)^2 \\ a^2+b^2 &= 1+a^2+b^2+2ab-2a-2b \\ -1 &= 2ab-2a-2b. \end{aligned}$$

Тогава лицето на триъгълника, който отсечката MN отрязва от квадрата, е равно на

$$S = \frac{1}{2}(1-a)(1-b) = \frac{1}{2}(1+ab-a-b) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задача 3. Катя избрала двадесет последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото M. Лили избрала двадесет и едно последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото N. Възможно ли е Катя и Лили да получат равни числа, т.е. $M = N$?

Решение: Равенството $M = N$ е възможно – например, ако Лили е избрала числата $2, 3, 4, \ldots, 22$ и ги е записала в този ред, а Катя е избрала числата $23, 4, 5, \ldots, 22$ (в записания ред).

Задача 4. В изпъкнал n-ъгълник са построени някои диагонали (които могат и да се пресичат) така, че никои три диагонала не се пресичат във вътрешна точка на многоъгълника. По този начин многоъгълникът е разбит на триъгълници. Колко най-много могат да са триъгълниците?

Решение: Ще докажем, че триъгълниците са най-много $2n - 4$ при четно $n = 2k$ и $2n - 5$ при нечетно $n = 2k + 1$.

Пример. Построяваме непресичащи се диагонали, които разбиват n-ъгълника на $k - 1$ четириъгълника (при нечетно n остава един триъгълник) и във всеки от тези четириъгълници построяваме двата диагонала (те го разбиват на четири триъгълника). При четно n получаваме $4(k-1) = 2n-4$ тръгълника, а при нечетно n триъгълниците са $4(k-1)+1 = 2n-5$.

Оценка. Първо ще отбележим, че няма диагонал, който пресича два други диагонала във вътрешни точки.

Да допуснем, че такъв диагонал съществува и да разгледаме отсечката върху него, която свързва две съседни пресечни точки. При пресичането на тази отсечка с двата диагонала се получават ъгли със сбор $360°$. Следователно от едната страна на отсечката сборът на ъглите е не по-малък от $180°$, т.е. не може да има триъгълник. Противоречие.

Следователно диагоналите могат да се разделят на пресичащи се двойки. Четирите края на дагоналите във всяка такава двойка също са свързани с дагонали или страни на многоъгълника (за да се получи разбиване на триъгълници). Това означава, че ако премахнем всички двойки пресичащи се диагонали, ще получим разбиване на многоъгълника на k четириъгълника и m триъгълника. Всички техни върхове са върхове на дадения многоъгълник, затова сборът от ъглите им е равен на сбора на ъглите на многоъгълника, т.е.

$$k.360^\circ + m.180^\circ = (n-2).180^\circ,$$

т.е. $2k + m = n - 2$. Броят на триъгълниците в първоначалното разбване е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 4.$$

Ако n е нечетно, от равенството $2k + m = n - 2$ следва, че m е нечетно, т.е. $m \geq 1$. В този случай оценката е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 5.$$

Задача 5. Намерете всички растящи аритметични прогресии с членове прости числа със свойството: броят на членовете на прогресията е краен и по-голям от разликата на прогресията.

Решение: Ще докажем, че търсените прогресии са 2, 3 и 3, 5, 7.

Да разгледаме прогресия с разлика 1, удовлетворяваща условието на задачата. Тя има поне два члена. Единият от тях е задължително четен, а единственото просто четно число е 2. По-малки от 2 прости числа няма, следователно 2 е първият член на прогресията. Вторият е 3, а третият член (4) не е просто число.

Да разгледаме прогресия с разлика 2, която удовлетворява условието. Тя съдържа поне 3 члена; нека първите три са $k-2, k, k+2$. Ясно е, че какъвто и остатък да дава k при деление на 3, един от тези членове се дели на 3. Простото число, което се дели на 3, е 3. Лесно се вижда, че 3 може да е само първи член на прогресията; получаваме 3, 5, 7. Четвъртият член е 9, съставно число.

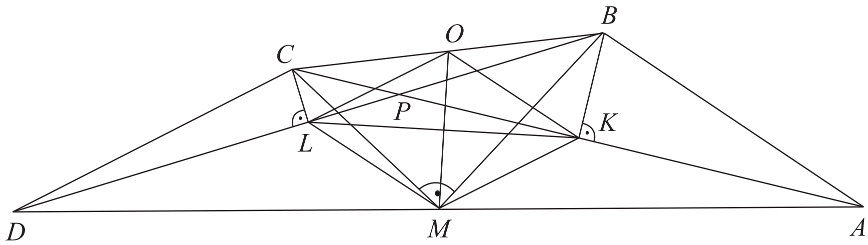
Да разгледаме прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разлика $d \geq 3$. Числата $d-1$ и d са взаимно прости, следователно всички прости делители на $d-1$ не делят d. Нека p е един от тези прости делители. Разглеждаме частта от прогресията $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$. (Това е част от прогресията, тъй като $p < d < n$.) Всички остатъци по модул p на числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ са различни. (Наистина, ако

$$\left.\begin{array}{l} a_i = a_1 + (i-1)d = sp + r \\ a_j = a_1 + (j-1)d = tp + r \end{array}\right\} \Longrightarrow (t-s)p = (j-i)d.$$

Тъй като $j - i < p$, дясната част на последното равенство не се дели на p, а лявата се дели. Противоречие.) Следователно един от разглежданите остатъци е 0. Това означава, че едно от числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ се дели на p. Това обаче е невъзможно, тъй като всяко от тези числа е просто и по-голямо от p (тъй като има номер най-малко 2 и следователно е по-голямо от d).

Задача 6. В четириъгълника $ABCD$ страните AB, BC и CD са равни, а точка M е среда на AD. Известно е, че $\sphericalangle BMC = 90°$. Намерете ъгъла между диагоналите на четириъгълника $ABCD$.

Решение: Нека O, K, L са среди съответно на BC, AC, BD, а P е пресечна точка на AC и BD. Точките K и L са различни (иначе $ABCD$ е ромб и $\sphericalangle BMC < \sphericalangle BPC = 90°$).



Триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ са равнобедрени, следователно медианата към основата във всеки от тях е и височина, т.е. $BK \perp AC$ и $CL \perp BD$. От равенството

$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BLC = 90°$$

следва, че точките K, M, L лежат на окръжност с диаметър BC и център точка O. Тъй като хордата KM е средна отсечка в $\triangle ACD$, получаваме, че $KM = \dfrac{1}{2}CD = OC$, т.е. тази хорда е равна на радиуса. Тогава $\triangle KOM$ е равностранен и $\sphericalangle MOK = 60°$.

Аналогично $\sphericalangle MOL = 60°$, т.е. $\sphericalangle KOL = 120°$. Вписаният ъгъл $\sphericalangle KBL$ се измерва с дъгата $\overset{\frown}{KL}$ (или с допълващата я, когато даденият четириъгълник не е изпъкнал),следователно е равен на $60°$ (или $120°$). Това означава, че $\sphericalangle PBK = 60°$, т.е. $\sphericalangle BPK = 30°$.

Задача 7. В своята каюта капитан Врунгел подредил в кръг разбъркана колода от 52 карти, като оставил едно свободно място. От палубата матрос Фукс, без да знае разположението на картите, назовава произволна карта. Ако тази карта е до свободното място, Врунгел я премества там, без да каже на Фукс. Иначе не прави нищо. После Фукс назовава друга карта и така колкото пъти иска, докато каже 'стоп'.

а) Може ли Фукс да играе така, че накрая всяка карта да се намира различно от първоначалното си място?

б) Може ли Фукс да играе така, че накрая асо пика да не е до свободното място?

Решение: а) Фукс може да играе така: 52 пъти назовава в един и същи ред всички карти (така назовава общо 52^2 карти) и след това казва 'стоп'. При такава игра картите се преместват в една и съща посока: ако първо е преместена карта a, то до следващото назоваване на a ще се споменат всички карти, включително и тази, която стои от другата страна на свободното място срещу a; тя се мести в същата посока и т.н. При всяко изреждане на колодата се премества поне една карта, значи общо преместванията са поне 52 и всяка карта си сменя мястото. От друга страна, всяка карта се е преместила най-много 52 пъти и следователно не може да се завърти и да се върне на мястото си (за което са необходими 53 хода).

б) Ще докажем, че за всяка последователност от назовани карти съществува начална позиция, която премнава в позиция с асо пика до свободното място. Нека избраната последователност е M.

Ясно е, че назовавайки повторно дадена карта, ние връщаме назад предишния ход. По същия начин, назовавайки последователност от карти в обратен ред, връщаме крайната позиция до началната.

Тогава, ако изберем за начална коя да е позиция с асо пика до свободното място и приложим обратната на M последователност от карти, ще получим начална позиция, която не е печеливша за M.