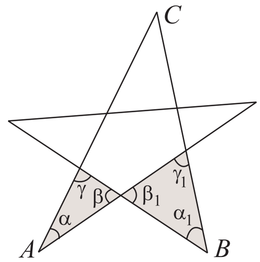
28. Международен Турнир на градовете
Пролетен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Митко нарисувал петолъчка, като начертал 5 отсечки без да вдига молива от листа. Той забелязал, че построените отсечки разделят петолъчката на 5 еднакви триъгълника и петоъгълник. Следва ли от това, че петоъгълникът е правилен (т.е. с равни ъгли и равни страни)?

Решение: Ще докажем, че петоъгълникът е правилен.

Да означим с C един от върховете на петолъчката, а с A и B – другте краища на отсечките през C. При означението на ъглите, показано на чертежа, имаме равенството на връхните ъгли $\beta = \beta_1$ и $\alpha_1 \neq \gamma$ (тъй като правите AC и BC не са успоредни).



По условие оцветените триъгълници са еднакви, следователно $\alpha_1 = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma$. Ясно е, че с подобни разсъждения можем еднозначно да определим разпределението на ъглите при всеки от петте еднакви триъгълника. Така получаваме, че $\beta = \gamma$. Затова всички ъгли на петоъгълника са равни на $180^\circ - \gamma$, а всички страни са равни като съответни елементи в еднакви триъгълници.

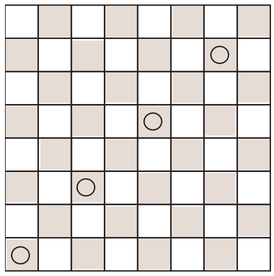
Задача 2. На дъската са записани две 2007-цифрени числа. Известно е, че от двете числа могат да се изтрият по 7 цифри така, че получените числа да са равни. Докажете, че в дадените числа могат да се вмъкнат по 7 цифри така, че отново да се получат равни числа.

Решение: Нека 2007-цифрените числа са K и C, а полученото след изтриване 2000-цифрено число е M. Между цифрите на M слагаме звездички на всяко място, където е била изтрита цифра: червени звездички вместо цифрите на K и сини – вместо цифрте на C. При обратната смяна на всички звездички със съответните им цифри ще се получи 2014-цифрено число B.

Ще покажем, че B може да се получи от K и от C с вмъкване по 7 цифри. Ако първо се заменят сините звездички, а след това червените, на втората стъпка получаваме B от K, а ако заменим първо червените, а после сините звездички, на втората стъпка получаваме B от C.

Задача 3. Колко най-малко топа трябва да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всички бели полета да са застрашени от тях? (Топът застрашава всички полета от реда и стълба, в който се намира.)

Решение: Необходими са най-малко 4 топа. Те могат да се поставят, например, както е показано на чертржа.
Тъй като топ на бяло поле застрашава 7 бели полета, а топ на черно поле застрашава 8 бели полета, а белите полета са общо 32, очевидно три топа не са достатъчни.



Задача 4. Дадени са три ненулеви реални числа със свойството: в какъвто и ред да се поставят тези числа като коефициенти на квадратен тричлен, тричленът има реален корен. Вярно ли е, че всеки от възможните тричлени има положителен корен?

Решение: Ще докажем, че всеки тричлен от условието има положителен корен. Да означим дадените числа с a, b, c, където c е най-малкото по модул. Ясно е, че няма тричлен с корен 0 (коефициентите са ненулеви).

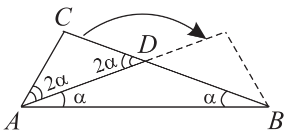
Да допуснем, че някой от тричлените няма положителен корен, т.е има два отрицателни корена. От формулите на Виет следва, че коефициентите на този тричлен (a, b, c в някакъв ред) са с еднакъв знак. Тъй като тричленът $ax^2 + cx + b$ има реален корен, то дискриминантата му е неотрицателна, т.е. $c^2 - 4ab \geq 0$. От друга страна, от избора на c следва, че $c^2 \leq |a||b| < 4|ab|$. За да са изпълнени едновременно тези неравенства, трябва a и b да са с различни знаци. Протворечие.

Задача 5. а) Торта има форма на тръгълник Δ_1, в който един ъгъл е три пъти по-голям от друг. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

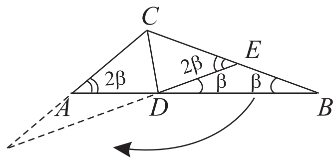
б) Същата задача за торта с форма на тъпоъгълен триъгълник, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли.

Решение: а) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$. На страната CB отбелязваме точка D така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$ и разрязваме по отсечката AD. Получават се два равнобедрени триъгълника. Като залепим отсечката AD на $\triangle ADC$ към отсечката DB, получаваме желаната форма (фиг. 1).

б) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B = 2\beta$. На страната BC отбелязваме точка E, симетрична на A относно ъглополовящата CD.



Фиг. 1



Фиг. 2

Триъгълникът DBE е равнобедрен (тъй като $\sphericalangle DEC = 2\beta$ и $\sphericalangle DBE = \beta$, то $\sphericalangle BDE = \beta$). Като отрежем $\triangle DBE$ и прилепим неговата страна DE към равната и отсечка AD, получаваме торта с подходяща форма (фиг. 2).